АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1032—1951

*

№ 2 1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покишшевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, С. А. Шиканов (зам. председателя), Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 2
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 7
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 14
Группы 15
Поля, кольца и структуры 20
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 27
Теория функций действительного переменного 34
Теория множеств 38
Приближение функций полиномами и их обобщениями 39
Теория функций комплексного переменного 42
Дифференциальные уравнения 54
Обыкновенные дифференциальные уравнения 54
Уравнения в частных производных . . 56
Приложения к физике, технике и естественным наукам. 65
Интегральные уравнения 70
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление 72
Анализ (другие вопросы) 73
Числовые ряды 79
Специальные функции 84
Интегральные преобразования и операционное исчисление 84
Приложения общих методов математического анализа 86
Функциональный анализ 86
Теория вероятностей 92
Математическая статистика 95
Теория игр и математическая экономика 99
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 101
Геометрия 105
Приложения геометрии 106
Проективная и начертательная геометрия 106
Алгебраическая геометрия 108
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 110
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 114
Метрические методы в геометрии 124
Геометрия выпуклых многообразий . . 126
Численные и графические методы 127
Таблицы 135
Вычислительные машины и математические приборы 136
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Новые книги, поступившие в редакцию . . —
Авторский указатель 152

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 1032—1951 **№ 2** **Февраль 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1032. Значение математики. Спрингер (The meaning of mathematics. Springer C. E.), Math. Teacher, 1955, 48, № 7, 453—459 (англ.)

Отмечается ошибочность распространенного взгляда на математику как на предмет, имеющий исключительно прикладное значение. В. И. Левин

1033. Пространственные понятия в точных науках от Канта до наших дней. Фрёйденталь (De ruimteopvatting in de exacte wetenschappen van Kant tot heden. Freudenthal H.), Euclides (Nederl.), 1955—1956, 31, № 4, 165—182 (голл.)

Обзорная лекция о взглядах разных философов, главным образом Канта, на пространственные понятия. Лишь мимоходом упоминаются точки зрения Лобачевского, Бойяи, Римана, Гельмгольца, Гильберта, Веронезе и Дельбёфа. И. Я. Депман

1034. Мысли о трех науках. Нёрлунд (Tanker om tre videnskaber. Nørlund N. E.), Nord. mat. tidskr., 1956, 4, № 1, 5—19 (дат., франц.)

Речь на соединенном заседании Датского математического общества и Датского геофизического общества, посвященном 70-летию автора. Высказываются мысли об исторической взаимосвязи математики, астрономии и геофизики. Ю. Г. Перель

1035. О педагогических взглядах академика А. Н. Крылова (К десятилетию со дня смерти). Круликовский Н. Н., Матем. в школе, 1956, № 1, 9—12

Отмечаются высказывания А. Н. Крылова о вреде противопоставления теории и практики, о том, что целью образования является «научить учиться», его борьба за научность преподавания против религиозного мракобесия, педагогическое мастерство. Особо упомянуты его исследования по истории математики, механики, техники; отмечается использование им в преподавании данных этих наук. К. А. Рыбников

1036. Исповедь учителя математики. Хаслер (A mathematics teacher's creed. Hassler J. O.), Math. Teacher, 1955, 48, № 7, 450—452 (англ.)

Речь перед учителями математики штата Оклахома (США), в которой излагается следующее кредо: математика, наряду с родным языком, является наиболее важной активной силой, способствующей развитию цивилизации; учитель должен достаточно широко и глубоко знать математику, ее истоки и приложения, для того чтобы быть в состоянии правильно освещать учебный материал и прививать учащимся уважение к своему предмету и восхищение им; учитель должен добросовестно относиться к своим педагогическим обязанностям, что включает изучение текущей методической литературы и неустанные поиски новых приложений элементарной математики в современной жизни. Статья содержит также обоснование, главным образом, первого тезиса. В. И. Левин

1037. «Упражнения естественные, истинные, а не надуманные». Валусинский («Des exercitations naturelles, vrayes et non escrites». Walusinski G.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 35, № 175, 231—235 (франц.)

Соображения по вопросам, затронутым на методической конференции в Антверпене, в частности, о роли упражнений и задач в преподавании математики в школе. Отмечается, что в средних школах Франции классы перегружены и число часов на математику недостаточно и что в этих условиях особенно важно пробуждать у учащихся интерес к предмету и стимулировать творческое отношение к его изучению. Фразой из Монтэня, поставленной в заглавии статьи, автор показывает свое отрицательное отношение к искусственным, безыдейным задачам, не развивающим инициативы учащихся, и пропагандирует такие задачи, которые естественно возникают из наблюдений учащихся. В частности, автор отвергает задачи, начинающиеся словами «Доказать, что...». В. И. Левин

1038. Геометрия в общем образовании. Хортон (Geometry in general education. Horton R. E.), Math. Mag., 1955, 29, № 1, 41—44 (англ.)

Автор считает, что следует преподавать геометрию в старших классах колледжей с гуманитарным уклоном (non-science majors). Излагается опыт проведения такого курса в городском колледже Лос-Анжелоса. Н. М. Бескин

1039 К. Умственная работа. Шпейзер (Die geistige Arbeit. Speiser Andreas. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 207 S., ill. 19.25 DM (нем.)

Содержание глав: 1. Умственная работа. 2. Пространственное толкование внешнего мира. 3. Платоновское учение о неизвестном боге и христианское триединство. 4. Учение Платона об идеях и математика. 5. Наука и вера. 6. Понятие очищения у Плотина. 7. Математическое рассмотрение искусства. 8. Доказательство бытия божия у Платона, Ансельма и Лейбница. 9. Философско-естественно-научный факультет. 10. Дух и математика. 11. Основания математики от Платона до Фихте. 12. Относительно свободы. 13. Математический путь мышления в науках о духе и в искусстве.

В книге, в частности, проводятся различные сопоставления между математикой и музыкой, математикой и изобразительным искусством. Однако рассмотрение собственно математики растворяется в общих рассуждениях идеалистического толка. Л. П. Гокиели

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1040. О биквадратных уравнениях у вавилонян. Райк А. Е., Уч. зап. Молотовск. ун-та, 1955, 9, № 4, 11—14

Разбор решения системы уравнений

$$xy = F, \quad a(x - y) = x^2$$

и опровержение мнения Нёйгебауэра, видевшего в вавилонском тексте доказательство того, что вавилоняне были знакомы с биквадратными уравнениями.
И. Н. Веселовский

1041. Математика и астрономия древних египтян. Степанич (Математика и астрономија древних Египћана. Степанић Ернест), Наука и природа, 1955, 8, № 9—10, 319—323 (серб.)

Популярный очерк.

1042. Наследие греков. Данциг (The bequest of the Greeks. Dantzig Tobias. London, Allen and Unwin, 1955, 191 pp., ill., 18 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 303, 8 (англ.)

1043. Некоторые задачи на деление плоских фигур. Линкер (Cîteva probleme de diviziune a figurilor plane. Linker A.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A7, № 2, 87—98 (рум.)

Приводятся сведения по вопросу о делении фигур, занимавшему видное место в руководствах геометрии, начиная с Евклида. Задачами на деление фигур особенно интересовались Герон Александрийский, Мухаммед из Багдада, Абуль Вафа, Леонардо Пизанский, Иордан Неморарий, в наше время М. Окань. Дается решение ряда примеров как исторических, так и взятых из современных учебников. И. Я. Депман

1044. Механические теоремы Архимеда (I teoremi meccanici di Archimede.), Civiltà macchine, 1956, 4, № 2, 65—74 (итал.)

Дается перевод «Эфодика» Архимеда с восстановлением пропавших мест текста и интересными комментариями умершего историка математики Энрико Руффини. И. Н. Веселовский

1045. Математик Ачария Джаядева. Шукла (Ācārya Jayadeva, the mathematician. Shukla Kripa Shankar), Ganita, 1954, 5, № 1, 1—20 (англ.)

Публикуются отрывки из «Алгебры» индийского математика Ачарии Джаядевы, сохранившиеся в «Сундари» — комментарии математика второй половины XI в. Удайядивакары к произведению Бхаскары (629 г. н. э.). Джаядева первый приводит циклический метод решения неопределенного уравнения $Nx^2 + 1 = y^2$ (хотя не доказано, что он является его автором), а также метод решения уравнения $Nx^2 + C = y^2$. Кроме того, в статье описываются принадлежащие Удайядивакаре методы решения неопределенных уравнений $x + y = a^2$, $x - y = a^2$, $xy + 1 = a^2$, основанные на правилах Джаядевы. И. Н. Веселовский

1046. Очерки по истории математики в Рю-кю. Гл. 3. Числовые знаки Рю-кю. Судо (A study of the history of mathematics in Ryu-kyu. III. Sudo Toshiichi), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1955, 5, № 2, 179—189 (англ.)

Гл. 1 и 2 см. РЖМат. 1957, 22, 23.

Описываются введенные на о-вах Рю-кю числовые знаки китайского происхождения, а также туземные. Среди китайских знаков интересно появление, начиная с тринадцатого века, знаков × и ð для «четырех» и «пяти», встречающихся в Средней Азии и Индии. Для истории возникновения системы числовых обозначений представляет интерес появление в некоторых местностях о-вов Рю-кю особых знаков для обозначения пяти го (единица меры) риса — (пятеричная система). И. Н. Веселовский

1047. Работы Де'Тоски-ди-Фаньяно по решению задачи о делении дуги окружности на любое число равных частей. Конте (I contributi di G. C. De'Toschi di Fagnano al problema della plurisezione degli archi. Conte Luigi), Archimede, 1956, 8, № 2, 92—95 (итал.)

Статья посвящена исследованиям на эту тему Де'Тоски-ди-Фаньяно, который продолжил соответствующие исследования Якоба и Иоганна Бернулли.
И. Н. Веселовский

1048. О развитии математики на Украине. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. В сб.: Историко-матем. исследования, Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 403—426

Общая историческая характеристика развития математики на Украине, в тесной связи с ее развитием в России и в СССР. Уделяется особое внимание фактам и вопросам, менее освещенным до сего времени в историко-математической литературе.

Изложение строится на основе такой периодизации: 1. Математика на Украине с XVI до XIX столетия (с подразделением на два периода, между которыми естественной гранью является дата воссоединения Украины с Россией). 2. От начала XIX в. до 70-х годов (период, отмеченный организацией трех университетов — в Харькове, Киеве, Одессе). 3. От 70-х годов XIX в. до Великой Октябрьской социалистической революции. 4. Общая характеристика развития математики на Украине после Великой Октябрьской социалистической революции.

Поставлен ряд конкретных историко-математических вопросов, заслуживающих дальнейшей исследовательской разработки. Е. Я. Ремез

1049. Развитие математики в XVI в. Кауфельдт (Die Entwicklung der Mathematik im 16. Jahrhundert. Kauffeldt Alfons), Math. und Phys. Schule, 1956, 3, № 5, 197—200 (нем.)

1050. Аналитическая геометрия после Декарта. Бойер (Post-Cartesian analytic geometry. Boyer Carl B.), Scripta Math., 1955, 21, № 2—3, 101—135 (англ.)

Доказывается неправильность широко распространенного мнения, что появление аналитической геометрии в трудах Декарта и Ферма в первой половине XVII в. повело к весьма быстрому преобразованию математики. Анализируются геометрические сочинения Ферма и Декарта, а также Роберваля (G. P. de Roberval, 1602—1675), Дебона (F. Debeaune, 1601—1652), Валлиса (J. Wallis, 1616—1703), Витта (J. de Witt, 1623—1672), Слюза (R. de Sluse, 1622—1685), Лаира (Ph. de Lahire, 1640—1718), Сен-Винцента (Gregory of St. Vincent, 1584—1667), Озанама (J. Ozanam, 1640—1717), Якоба Бернулли (J. Bernoulli, 1654—1705), Иоганна Бернулли (J. Bernoulli, 1667—1748), Лейбница (G. W. von Leibniz, 1646—1716), Крейга (J. Craig, умер в 1731 г.). На примере этих сочинений автор показывает, что методы аналитической геометрии входили в математику сравнительно медленно, практически в течение всего XVII и первой половины XVIII в.

Изобретение аналитической геометрии открыло возможности для исследования бесконечно большого разнообразия кривых. Однако новые кривые и их классы вводились в математику весьма часто и из механических соображений. Возможно, что два различных подхода к созданию дифференциального и интегрального исчисления, характерные для Ньютона и Лейбница, сформировались как следствие конкуренции между аналитическими и механическими способами определения кривых. Единообразное, систематическое и достаточно общее применение методов аналитической геометрии к исследованию кривых было достигнуто лишь после 1748 г., на основе созданной Эйле-

ром (L. Euler, 1707—1783) во «Введении в анализ бесконечно малых» общей теории функций. В последующем в течение XVIII в. мощным средством изучения свойств кривых линий сделался математический анализ, особенно теория решений дифференциальных уравнений.
К. А. Рыбников

1051. «Арифметика» Д. С. Аничкова. Рыбаков П. М., Матем. в школе, 1956, № 1, 15—20

Об учебнике «Теоретическая и практическая арифметика в пользу и употребление юношества» (изд. 1764, 1775, 1786, 1793), написанном профессором Московского университета Д. С. Аничковым (умер в 1788 г.)
К. А. Рыбников

1052. Паскаль — гениальный математик и физик. Главичка (Pascal-genialny matematyk i fizyk. Hławiczka Stanisław), Horyzonty techn., 1956, 9, № 1, 18—21 (польск.)

Украшенный анекдотами рассказ о жизни Паскаля и его открытиях (арифметическая машина, числовой треугольник, передача давления, барометр).
И. Я. Депман

1053. Отношения между двумя Пиетро-Паоло Караваджи и Винченцо Вивиани. Тенка (Relazioni fra i due Pietro-Paolo Caravaggi e Vincenzio Viviani. Tenca Luigi), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, 86, № 2, 835—846 (итал.)

Публикуется переписка двух миланских математиков Пьетро-Паоло Караваджи-отца (1617—1688) и сына (1659—1723) с Винченцо Вивиани (1622—1703), последним учеником Галилея.
И. Н. Веселовский

1054. О месте рождения Эванджелиста Торричелли. Тенка (Sul luogo dove nacque Evangelista Torricelli. Tenca Luigi), Period. mat., 1956, 34, № 2, 109—112 (итал.)

Спор по этому вопросу получил разрешение в пользу коммуны Фиренцуолы Флорентийской префектуры, где в 1954 г. поставлена соответственная мемориальная доска.
И. Я. Депман

1055. Речь академика И. М. Виноградова. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». М., АН СССР, 1956, 7—10

В речи, произнесенной на торжественном заседании, организованном Всесоюзным обществом культурных связей с заграницей и Отделением физико-математических наук АН СССР 23 февраля 1955 г. по случаю столетия со дня смерти Гаусса, говорится: «Гауссу принадлежат глубокие и основополагающие исследования почти во всех основных областях математики: в теории чисел, в геометрии, в теории вероятностей, в анализе, в алгебре, а также важные исследования в астрономии, в геодезии, в механике и в теории магнетизма». Подробно характеризуются работы Гаусса в теории чисел и кратко его работы в других областях и его рукописное наследие, а также отмечается, что «русские математики всегда высоко ценили и глубоко изучали работы Гаусса» и продолжали его исследования. «Глубокая связь, которая всегда существовала между немецкими и русскими математиками, должна служить примером того дружеского сотрудничества, к которому мы стремимся во всех областях нашей жизни и которое принесет пользу обоим нашим великим народам».
Б. Н. Делоне

1056. Речь на открытии торжеств, посвященных памяти Гаусса в Брауншвейге 20 февраля 1955 г. Пунгс (Ansprache zur Eröffnung der Gauß-Gedenkfeier in Braunschweig am 20. Februar 1955. Pungs Leo), Abhandl. Braunschweig. Wiss. Ges., 1955, 7, 2—6 (нем.)

1057. Математический дневник Гаусса. Эмар, Лафон (Le journal mathématique de Gauss. Eymard P., Lafon J. P.), Rev. histoire sci., 1956, 9, № 1, 21—51 (франц.)

Гаусс начал свой дневник 30 марта 1796 г. заметкой о делении круга и закончил его 9 июля 1814 г. Всего дневник содержит 146 записей, из которых 55 приходятся на долю анализа, 46 — теории чисел, 31 — алгебры, 13 — астрономии, 5 — механики, 4 — геометрии и 2 — теории вероятностей. Записи исключительно скупые; в качестве примера можно привести обе записи об основаниях геометрии: от 28 июля 1797 г. «Я доказал возможность плоскости» и от сентября 1799 г. «Мне удалось значительно продвинуться в вопросе о принципах геометрии». Есть и такие заметки: «Мы победили Дракона» (от 21 октября 1796 г.)

Дневник дает возможность точно датировать открытия Гаусса. Так, оказывается, что Гаусс владел эллиптическими функциями за 30 лет до появления мемуара Абеля. Одновременно обращает на себя внимание отсутствие записей, связанных с неевклидовой геометрией.

Перевод (с латинского оригинала) сделан точно. Комментарии очень краткие и большей частью отсылают к соответствующим томам собрания сочинений Гаусса (в основном, к тому 10, в котором помещен немецкий перевод «Дневника» — Gauss, Werke, T. X., fasc. 1, Teubner, Leipzig, 1917). «Дневник» снабжен указателем по разделам.
Р. И. Пименов

1058. К. Ф. Гаусс и Дерптско-Юрьевский университет. Депман И. Я., В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 1, М., АН СССР, 1956, 241—245

Первая публикация письма Гаусса по поводу приглашения его на должность профессора кафедры математики и астрономии Дерптского университета. Переезд в Дерпт не состоялся потому, что положение профессора в Дерпте не обеспечивало Гауссу достаточного досуга для научной работы. Условием для приезда он ставил отделение кафедры математики от кафедры астрономии. В комментариях к письму высказывается предположение, что поездка в Россию привлекала Гаусса из-за возможности приобретения более широкого поля деятельности и благодаря интересу к русской культуре.
Р. А. Симонов

1059. Николай Иванович Лобачевский (К 100-летию со дня смерти), Матем. в школе, 1956, № 3, 1—2

1060. Великий русский математик. Вестн. высш. школы, 1956, № 3, 53—54

К 100-летию со дня смерти Н. И. Лобачевского.

1061. Творец неевклидовой геометрии. (К 100-летию со дня смерти Н. И. Лобачевского). Рыбкин Г. Ф., Наука и жизнь, 1956, № 3, 58—59

1062. 100 лет со дня смерти Н. И. Лобачевского., Вестн. АН СССР, 1956, № 4, 137—138

1063. Великий русский математик Н. И. Лобачевский и его роль в мировой науке. Жаутыков О. А., Вестн. АН КазССР, 1956, № 2, 67—76

1064. Философское значение теоретического наследия Н. И. Лобачевского. Марков Н. В., Вопр. философии, 1956, № 2, 132—141

Общедоступное изложение деятельности Н. И. Лобачевского, его философских взглядов, а также точек зрения автора на происхождение философской направленности Лобачевского. Автор считает несомненным влияние работ А. С. Лубкина и Т. Ф. Осиповского на формирование критического отношения Лобачевского к философии Канта. Дается критическая оценка некоторых советских статей философского характера о Лобачевском.
Б. В. Гнеденко

1065. О деятельности Н. И. Лобачевского в области народного просвещения. Якунин П. Ф. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9., М., Гостехиздат, 1956, 129—144

Лобачевский проводил в первые годы ректорства значительную работу по распространению в Казанском учебном округе метода взаимного обучения. Он организовал при университете подготовку необходимых

кадров и заботился о снабжении училищ соответствующими учебными пособиями. Автор привлекает новые архивные материалы, обрисовывающие эту работу, дает статистику роста числа училищ с классами взаимного обучения. Затронуты также некоторые другие стороны деятельности Лобачевского в области народного просвещения. Б. Л. Лаптев

1066. О проникновении идей Лобачевского в среднюю школу. Чистяков В. Д. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 247—270

В виде отдельных тезисов сформулирован ряд педагогических высказываний Лобачевского и его взгляды на преподавание элементарной геометрии. Некоторые известные материалы не использованы (например, «Обозрения преподавания»). Далее рассмотрены статья А. В. Летникова (1868) и работы М. Е. Ващенко-Захарченко (1880, 1883), пропагандировавших идеи неевклидовой геометрии среди учителей с целью совершенствования преподавания геометрии в школе. Освещена проходившая на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (1911, 1913 гг.) дискуссия по вопросу о включении элементов геометрии Лобачевского в школьный курс. Дан беглый обзор популяризации геометрии Лобачевского в советский период. Б. Л. Лаптев

1067. Дополнительные материалы к истории распространения идей Н. И. Лобачевского в России. Гайдук Ю. М. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 215—246

Даются дополнительные к статье Э. К. Хилькевича (Историко-матем. исследования. Вып. 2, 1949, 168—230) материалы о распространении идей неевклидовой геометрии в России в XIX в. Рассмотрено отражение этих идей в философской литературе (книга В. В. Лесевича, переводы Г. Гельмгольца и Дж. Г. Льюиса) и популяризация неевклидовой геометрии в книгах М. Е. Ващенко-Захарченко, в статьях и книгах методистов-преподавателей математики С. И. Шохор-Троцкого, И. И. Александрова, М. С. Волкова и др. Дан обзор сведений о Лобачевском в русских энциклопедиях XIX в. В приложении приведены «Дополнительные материалы к библиографии, изданной в России в XIX в. литературы по геометрии Лобачевского и смежным вопросам» (146 назв.), не вошедшие в «Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей». В. М. Герасимовой (М., 1952). В библиографических описаниях нередко отсутствуют данные о страницах работ. Б. Л. Лаптев

1068. К вопросу о рукописях Карла Маркса по математике. Сюй Мо-фу (關於馬克思數學手稿的幾個問題. 許默夫), 新科學, Синь кэсюэ, 1955, № 2, 37—41 (кит.)

Предварительно кратко характеризуется борьба материализма с идеализмом в математике XVIII и начала XIX вв., когда еще не была решена задача обоснования дифференциального исчисления. Метафизический подход к проблеме противоречия в математике, когда учитывалось либо только сходство, либо только различие методов элементарной и высшей математик, дало основу для паразитирования идеализма. Замена «мистического дифференциального исчисления» Ньютона и Лейбница «рациональным дифференциальным исчислением» Даламбера и Лагранжа не решила проблемы, а лишь обошла ее. Диалектика Гегеля в силу своего идеалистического характера также неспособна была раскрыть суть дела, поскольку она считала, что в математике нет диалектического единства. Только Маркс, исходя из диалектического материализма и считая, что математика является отражением реальной действительности, что она создана в процессе материального производства человеческого общества, показал существование диалектического единства в ней, показал, как методы высшей математики развились из методов элементарной математики, находясь первоначально в них в зародышевом состоянии, указал на скачкообразный характер этого развития.

Отмечается работа Маркса о связи бинома Ньютона с теоремами Тейлора и Маклорена.

Маркс впервые правильно решил вопрос об употреблении в математике символов. В противоположность Гельмгольцу и махистам, подходившим к этому вопросу с идеалистических позиций, Маркс считал, что символ является отражением реального процесса и только тогда качественен, когда наиболее полно отражает этот процесс.

Автором отмечается большое внимание к исследованию математических рукописей Маркса со стороны советских ученых С. А. Яновской и К. А. Рыбникова. Э. И. Березкина

1069. Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского. Антропова В. И., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1955, 304—320

Сообщается о недавно обнаруженном конспекте 17 лекций М. В. Остроградского по интегральному исчислению. Доказывается, что они были прочитаны в 1858/59 учебном году в Петербурге в Инженерной академии. Лекции посвящены теории несобственных интегралов с постоянными пределами и общей теории кратных интегралов. В них впервые в России широко применена общая теория аналитических функций. К. А. Рыбников

1070. Математическая деятельность Венгерской Академии наук до «соглашения». Сенаши (A magyar tudományos akadémia matematikai tevékenysége a kiegyezésig. Szénássy Barna), Acta Univ. debrecen., 1954, 1, 5—28 (венг.)

Очерк математической деятельности Венгерской Академии наук со времени ее основания (1830 г.) до соглашения между высшим венгерским дворянством и династией Габсбургов (1867 г.). Названный период характеризуется национальным угнетением венгерского народа Габсбургами, вследствие чего условия развития самостоятельной научной жизни в Венгрии были тяжелыми.

Приведены названия наиболее значительных математических работ членов Венгерской Академии Наук в период с 1830 по 1867 г. Перечисляются имена математиков, членов Венгерской Академии наук в рассматриваемый период, с краткими биографическими данными. К. С. Сцилард

1071. Развитие теории вероятностей на Украине. Гнеденко Б. В., Гихман И. И. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 477—536

Работа состоит из трех параграфов. § 1. Период становления теории вероятностей как математической науки. Освоение идей Петербургской школы. Здесь рассматриваются лекция М. Е. Ващенко-Захарченко (1863) и курсы теории вероятностей В.П.Ермакова (1878) и М. А. Тихомандрицкого (1898).

§ 2. Классические исследования и подготовка новых путей развития теории вероятностей. Рассматриваются работы по теории вероятностей А. М. Ляпунова и С. Н.Бернштейна.

§ 3. Современный период в развитии теории вероятностей. Рассматриваются работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова и исследования по теории вероятностей, выполненные во Львове и Киеве в последние годы. Прослеживается связь исследований на Украине с исследованиями русских ученых и их взаимные влияния. Библиография, имеющая 179 названий, содержит все работы по теории вероятностей и математической статистике, выполненные на Украине. Иногда выделение

опросов, развиваемых на Украине, является достаточно скусственным. Л. Е. Майстров

072. «Журнал элементарной математики» и «Вестник опытной физики и элементарной математики». Дахия С. А. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 537—612

Исторический очерк, посвященный наиболее распространенному в дореволюционной России научно-популярному «Журналу элементарной математики» (1884—1886), основанному в Киеве проф. ун-та Н. П. Ермаковым и выходившему впоследствии в несколько измененном виде под названием «Вестник опытной физики и элементарной математики» (1886—1917) в Одессе, причем тогда редактором-издателем являлся преподаватель Э. К. Шпачинский; с 1899 г. журнал был передан кружку преподавателей Новороссийского (Одесского) ун-та и с 1904 г. редактировался В. Ф. Каганом.

Дан обзор статей, помещенных в журнале, освещены итоги I и II Всероссийских съездов преподавателей математики и дискуссия о реформе преподавания математики. Б. Л. Лаптев

073. О работах В. П. Ермакова (1845—1922) по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Латышева К. Я., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 2, 231—238

Освещаются результаты В. П. Ермакова об интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, характеризуются данные Ермаковым признаки интегрируемости уравнения

$$(x+a)(x+b)\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\alpha}{x+a}+\frac{\beta}{x+b}+\gamma\right)y.$$

Весьма кратко характеризуются результаты Ермакова в решении задачи Коркина: составить дифференциальное уравнение $Mdx + Ndy = 0$, полный интеграл которого имеет вид $\sum_{k=1}^{n}(y - v_k)^{m_k}$, где $v_k = v_k(x)$ — заданные функции.

Примечание референта. 1) Автор ошибочно считает, что впервые нахождением решений в замкнутом виде уравнений второго порядка занимался Лиувилль. В действительности, еще Эйлер в работе 1738 г. (Euler L., Commun. acad. sci. Petropolit (1738), 1747, **10**, 40—55) исследовал случаи интегрируемости в конечном виде уравнения

$$(a+bx^n)x^2d^2u+(c+ex^n)xdudx+(f+gx^n)dx^2=0,$$

где a, b, c, e, f, g и n — постоянные. Уравнения Лежандра, Чебышева, Чебышева—Эрмита и уравнение Гаусса содержатся в этом уравнении как частные случаи. 2) Первая постановка задачи Коркина была дана проф. Дерптского университета Ф. Миндингом (Минг Ф., Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными, С.П., 1862, стр. 7 и след.)

Н. И. Симонов

074. 10 лет со дня смерти А. Н. Крылова. Лучинов С. Т., Вестн. АН СССР, 1956, № 2, 141—143

075. Джино Фано. Терracини (Gino Fano (1871—1952). Terracini Alessandro), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1952—1953, **87**, № 1, 350—360 (итал.)

Дается очерк о работах Фано (1871—1952), ученика Овидио и Клейна, профессора проективной и начертательной геометрии в Турине. Видный представитель итальянской школы многомерной геометрии Фано является автором основных обзоров по аналитической и проективной геометрии в Энциклопедии математических наук. И. Я. Депман

1076. Алан Матисон Тьюринг. Ньюман (Alan Mathison Turing (1912—1954). Newman M. H. A.), Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc., 1955, **1**, 253—263 (англ.)

Биографический очерк и обзор научных работ члена Лондонского королевского общества А. М. Тьюринга, скончавшегося 7 июня 1954 г. Его научные интересы были многообразными и не ограничивались математикой. Математические работы Тьюринга в основном посвящены математической логике и вычислительным машинам. Он имеет отдельные результаты в областях аппроксимации групп Ли конечными группами и вычисления дзета-функции Римана. Приложен список работ Тьюринга. К. А. Рыбников

1077. Арчибалд Рид Ричардсон. Тернбулл (Archibald Read Richardson (1881—1954). Turnbull H. W.), Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc., 1955, **1**, 223—237 (англ.)

Очерк жизни, педагогической и научной деятельности члена Лондонского королевского общества (с 1946 г.), профессора математики университета в Уэльсе (Англия) А. Р. Ричардсона, скончавшегося 4 ноября 1954 г.

Работы Ричардсона, за исключением нескольких ранних статей, посвящены проблемам современной алгебры. Приложен список его работ. К. А. Рыбников

1078. Памяти Пьера Серджеску (1893—1954). Реймон (A la mémoire de Pierre Sergescu (1893—1954). Reymond A.,), Enseign. math., 1955, **1**, № 1—3, 21—29 (франц.)

Краткий биографический очерк и обзор научной и научно-организационной деятельности П. Серджеску, скончавшегося 20 декабря 1954 г. Его научные работы относятся к теории интегральных уравнений, алгебре и истории математики. Румын по национальности, Серджеску с 1946 г. жил и работал в Париже, занимая руководящие должности в международном объединении по истории науки и его органе: «Archives internationales d'Histoire des sciences». К. А. Рыбников

1079. Арчибалд и математические библиотеки. Адамс, Нёйгебауэр (R. C. Archibald and Mathematics Libraries. Adams C. R., Neugebauer Otto), Science, 1956, **123**, № 3198, 622—623 (англ.)

Биографические данные об американском математике Раймонде Арчибалде (1875—1955), авторе ряда книг по истории и библиографии математики, редакторе нескольких математических журналов. И. Я. Депман

1080. Артур Ли Диксон. Чонди (Arthur Lee Dixon (1867—1955). Chaundy T. W.), Biogr. Mem. Fellows Roy. Soc., 1955, **1**, 33—36 (англ.).

Справка о жизни и деятельности А. Л. Диксона, профессора университета в Оксфорде (с 1945 г.— в отставке), скончавшегося 20 февраля 1955 г. Большинство его математических работ посвящено алгебре, в частности приложениям алгебры к геометрии, а также эллиптическим и гиперэллиптическим функциям. А. Л. Диксон являлся последователем традиций Кэли (Caeley, 1821—1895), заложившего основы современной алгебраической геометрии. Приложена библиография сочинений А. Л. Диксона. К. А. Рыбников

1081. Карло Сомильяна и его научное творчество. Агостинелли (Carlo Somigliane e la sua opera scientifica. Agostinelli Cataldo), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 5—30 (итал.)

Статья памяти Сомильяна (1860—1955), ученика Бельтрами и Бетти, с 1892 г. профессора математической физики в Павии и Турине, развивавшего идеи Бетти

и Вейнгартена в теории упругости. Большое число из его 146 работ, список которых приложен к статье, посвящено вопросам физики Земли, сейсмологии и глациологии. Он возглавлял итальянский и международный глациологический комитеты. И. Я. Депман

1082. Росс Вальтер Марриотт — астроном (1882—1955). К а м п (R. W. Marriott, astronomer. K a m p P e t e r v a n d e), Science, 1956, **123**, № 3196, 536 (англ.)

1083. Вацлав Серпинский — вицепрезидент Польской академии наук. К у р а т о в с к и й (Wacław Sierpiński. K u r a t o w s k i K a z i m i e r z), Nauka polska, 1956, 4, № 1, 67—70 (польск.)

1084. Михаил Алексеевич Знаменский. (К семидесятилетию со дня рождения). Р е ш о в Н. О., Матем. в школе, 1956, № 2, 57—59

1085. Сергей Михайлович Никольский (К 50-летию со дня рождения). К о л м о г о р о в А. Н., С т е ч к и н С. Б., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 239—244

1086. Профессор Жорж Дармуа (Le professeur Georges Darmois), Rev. gén. sci. pures et appl., 1956, **63**, № 3—4, 66—67 (франц.)

1087 К. Вячеслав Васильевич Степанов [1889—1950. Математик]. А л е к с а н д р о в П. С., Н е м ы ц к и й В. В. М., МГУ, 1956, 59 стр.; Библиогр. печ. трудов В. В. Степанова, стр. 56—59, 80 к.

1088 Д. Русские методические и научно-популярные журналы по математике (1833—1917 гг.); их история и роль в развитии математического просвещения в России. Д а х и я С. А. Автореф. дисс. канд. пед. н. Киевск. гос. пед. ин-т, Киев, 1956

1089 Д. Теория непрерывных величин и учение о числе в работах азербайджанского ученого XIII века Мухаммеда Насирэддина Туси. К а с у м х а н о в Ф. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., АН СССР, М., 1956

См. также: 1626, 1682, 1714 К, 1924

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1090. Редукция к двуместному предикату. К у а й н (Reduction to a dyadic predicate. Q u i n e W. V.), J. Symbolic Logic, 1954, **19**, № 3, 180—182 (англ.)

Показывается, что всякую формальную теорию θ, основанную на узком исчислении предикатов, можно (в смысле интерпретации) перевести на язык теории θ', в которой единственным предикатом служит некоторый двуместный предикат Fxy. Областью, на которой интерпретируется θ', служит замыкание области θ относительно операции образования упорядоченной пары $\langle xy\rangle$ (в обозначениях автора, x; y). Упорядоченную систему $\langle x_1 \ldots x_n\rangle$ (в обычном смысле Куратовского) с одинаковыми $x_1, \ldots x_n$, совпадающими с x, автор обозначает nx.

Пусть предикатные символы теории θ d_i-местные символы 'F_i' ($i = 1, 2, \ldots$ — по всему натуральному ряду или некоторому его отрезку). Тогда предикат F интерпретируется как:

$$Fxy \equiv : \exists z\,(x = \{y, z\}) \vee \cdot x =$$
$$= y \cdot (\exists n)\,(\exists w_1) \ldots (\exists w_{d_n}) \cdot (F_n w_1 \ldots w_{d_n} \cdot x =$$
$$= \langle n w_1 w_1 w_1 w_2 w_3 \ldots w_{d_n}\rangle)$$

($\{y, z\}$ — неупорядоченная пара, y, z). Показывается, что обозначения '$x = y$', '$x = \{yz\}$' могут быть введены в θ' определениями $x = y \to (z)\,(Fzx \equiv Fzy)$; $x = \{yz\} \to$ $\to (w)\,(w \neq x \,.\, Fxw \,.\equiv.\, w = y \vee w = z)$; это позволяет далее определить упорядоченные nx и, наконец, для фиксированных n и d_n определить:

$$F_n w_1 \ldots w_{d_n} \to (\exists x)\,(\exists y)\,(Fxx \,.\, y = n w_1 \,.\, x =$$
$$= \langle y w_1 w_1 w_2 w_3 \ldots w_{d_n}\rangle).$$

А. С. Есенин-Вольпин

1091. Редукция к симметрическому предикату. К о б е м (Reduction to a symmetric predicate. C o b h a m A l a n), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 56—59 (англ.)

В статье развиваются идеи Куайна (см. также реф. 1090). Показывается, что при некоторых дополнительных ограничениях двуместный предикат Fxy может быть заменен симметрическим двуместным предикатом Gxy. Метод исследования автора состоит в следующем: через предикат равенства и предикат $x = \{y, z\}$ (которые в статье Куайна определены при помощи Fxy) вводится ряд промежуточных предикатов и, наконец, симметрический двуместный предикат Gxy.

Именно, это достигается с помощью следующих пяти определений:

$$\text{`}Axy\text{'} \to \text{`}x = \{y\}\text{'},\ \text{`}Bxy\text{'} \to \text{`}x = \{y, \{y\}\}\text{'},$$
$$\text{`}Cxy\text{'} \to \text{`}x \neq y\,(\exists z)\,(\exists z_1)\,(\exists z_2)\,(x = \{z, z_1\},\ y = \{z, z_2\}),$$
$$\text{`}Dxy\text{'} \to \text{`}Axy \vee Ayx \vee Bxy \vee Byx \vee Cxy\text{'},$$
$$\text{`}Gxy\text{'} \to \text{`}Dxy \vee .x = y.Fxx\text{'}.$$

Затем предикат Gxy принимается за исходный, а предикаты равенства Fxy, а также все промежуточные предикаты определяются через Gxy. При обосновании закономерности этих определений используются первоначальные определения этих предикатов через Fxy.

Б. Ю. Пильчак

1092. Исчисление предикатов с ε-символом. М а э х а р а (The predicate calculus with ε-symbol. M a e h a r a S h ô j i), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 4, 323—344 (англ.)

Рассматривается исчисление предикатов, которое получается из классического генценовского исчисления предикатов LK (Kleene, Introduction to metamathematics, 1952, § 77) присоединением термов вида $\varepsilon\mathfrak{x}F(\mathfrak{x})$ и логических аксиом вида $\mathfrak{F}t \to \mathfrak{F}(\varepsilon\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}))$. Доказывается, что такое расширение любой элементарной аксиоматической системы, основанной на исчислении предикатов, не приводит к противоречию, откуда следует так называемая 2-я ε-теорема об устранимости ε-символов (Hilbert — Bernays, 1939). Аналогичный результат получается для исчисления предикатов с равенством. Без доказательства такой же результат приводится для исчисления предикатов с кванторами $\forall^\circ$ и $\exists^\circ$ по переменным высказываниям (где $\varepsilon^\circ\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ определяется как $\forall^\circ\mathfrak{x}\,(\mathfrak{x} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))$ или же как $\exists^\circ\mathfrak{x}\,(\mathfrak{x}\&\mathfrak{F}(\mathfrak{x}))$.

Книги Гильберта и Бернайса и Клини не цитируются.

А. С. Есенин-Вольпин

1093. Импликация и отрицание в свете методов Генцена и Фитча. Г р и з (L'implication et la négation vues au travers des méthodes de Gentzen et de Fitch. G r i z e J e a n - B l a i s e), Dialectica, 1956, **9**, № 3-4, 363—381 (франц.; рез. нем., англ.)

Обзорная работа, посвященная сопоставлению различных аксиоматических систем исчисления высказываний, а именно: классической, интуиционистской, минимальной и менее известной системы Фитча (Fitch F. B., Symbolic Logic, An introduction, New York, 1952). Эта система может быть получена присоединением к аксиомам положительного исчисления для импликации следующих аксиом отрицания: $\neg\neg A \supset A$, $A \supset \neg\neg A$, $\neg A \supset (A \supset B)$. Отсутствует аксиома $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$, и закон Пирса $((A \supset B) \supset A) \supset A$ оказывается невыводимым. Если, далее, ввести $\neg(A \supset B) \sim A \& \neg B$, то система оказывается эквивалентной классической. Отношения между четырьмя системами: минимальной, интуиционистской, классической и Фитча, характеризуются тем, что во всех этих системах справедливы теоремы о дедукции, отрицание же $\neg A$ допускает интерпретацию: «A опровержимо», «A абсурдно», «A противоречит фактам» соответственно. А. С. Есенин-Вольпин

1094. Непротиворечивость и полнота. Резюме. Де-Сьюа (Consistency and completeness. A résumé. DeSua Frank), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 5, 295—305 (англ.)

Обзор основных направлений в основаниях математики и важнейших результатов в этой области. Популярное изложение теорем Гёделя о неполноте. Новых результатов статья не содержит. А. С. Есенин-Вольпин

1095 К. Технические применения логики. Туше (Les applications techniques de la logique. Touchais M. Paris, Dunod, 1956, 82 p., ill.) (франц.)

Книга содержит специальный курс математической логики для инженеров и обзор технических применений математической логики. Математическая логика излагается в части I книги в объеме булевой алгебры, которая представлена в виде теории альтернативы, т. е. общей теории операций над двоичными переменными. Для обозначения бинарных операций используются особые «наглядные знаки» (РЖМат, 1955, 2429). Рассматриваются алгебраические свойства бинарных операций над двоичными переменными и «исчисление знаков» (применение теории альтернативы к «наглядным знакам» операций). В части II излагается исчисление релейно-контактных схем, приводятся примеры синтеза таких схем, излагается исчисление замыканий (для ящиков зависимостей в устройствах железнодорожной централизации) и дается краткий очерк других возможных применений математической логики в технике (упомянуты ткацкие станки, регулирование уличного движения, цифровые вычислительные машины и др.). Вводится понятие функции проводимости (fonction de jonction) между двумя узлами схемы и предлагается метод синтеза мостиковых контактных схем подбором контактов для готовых мостиковых скелетов («форм»). Контакты подбираются посредством определения функций проводимости между разными узлами скелета по заданным условиям работы схемы. Для этого используется «исчисление знаков». Оригинально трактуются поляризованные схемы.

Во вступлении к книге автор энергично нападает на классическую логику в пользу логики математической. Книга снабжена также предисловием Лемана (G. Lehmann), где отмечается отставание математической теории дискретных автоматов от теории сервомеханизмов и значение алгебры логики для преодоления этого отставания. Библ. 11 назв. Г. Н. Поваров

См. также: 1212, 1708

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1096. Проблемы аналитической теории чисел. Виноградов И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2 М., АН СССР, 1956, 5

Рассматривается совокупность проблем современной теории чисел, в которых применяются оценки тригонометрических сумм известного класса, изучаемого автором. Г. В. Емельянов

1097. Оценка тригонометрической суммы. Юэ Минь-и (一個三角和數的估值. 越民義), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 105—114 (кит., рез. англ.)

Дается оценка тригонометрической суммы, распространенной по «близнецам». Пусть ε — любое > 0, $N > 2$, $\log N$, $1 < H \leqslant \exp r^{\varepsilon}$, $\tau = NH^{-1}$, $a = a/q + z$, $(a, q) = 1$, $0 < q \leqslant \exp r^{\varepsilon/2}$, $|z| \leqslant 1/q\tau$,

$$S = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p+2=p'}} \exp(2\pi i a p),$$

где p и p' — простые числа. Тогда $S \ll N(rq)^{\varepsilon}/r^2\sqrt{q}$. Г. В. Емельянов

1098. О выражениях и оценках порядка тригонометрических сумм. Юэ Минь-и (一類三角和數的表示式及其近似估值. 越民義), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 35—54 (кит., рез. англ.)

Пусть q_1 и q_2 — целые положительные,

$$\delta(n; l_1, l_2) = \sum_{lm=n} \exp\left\{-2\pi i\left(\frac{l_1}{q_1}l + \frac{l_2}{q_2}m\right)\right\}.$$

Находится точное выражение суммы $\sum_{n<\omega^2} \delta(n; l_1, l_2)$ через двойную сумму

$$\sum_{l'=1}^{q_1} \sum_{l''=1}^{q_2} \exp\left\{-2\pi i\left(\frac{l_1}{q_1}l' + \frac{l_2}{q_2}l''\right)\right\}.$$

Указывается на получение в качестве следствий выражений для суммы числа делителей $\sum_{n<\omega^2} d(n)$ (Вороной), для сумм характеров $\sum_{mn<\omega^2} \chi_1(m)\chi_2(n)$, числа целых идеалов квадратичного поля с заданной границей нормы и др. Г. В. Емельянов

1099. Рациональные тригонометрические суммы с показательными функциями, их обобщения и приложения. Коробов Н. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 109

Обзорный доклад.

1100. Диофантовы приближения с показательными функциями. Коробов Н. М., Тр. 3-го Всес. Матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 6—7

Обзорный доклад.

1101. О проблемах, родственных «облегченной проблеме Варинга». Састри (On problems allied to the «easier Waring problem». Sastry S.), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 1, 87—89 (англ.)

Элементарно выводится, что всякое нечетное число представляется в виде $n = x_1^4 - x_2^4 \pm x_3^3 + x_4^3$ с целыми положительными x_i. Приводятся примеры классов чисел, представимых в виде $n = x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 + x_4^4$, а также

примеры небольших чисел, представимых в виде $n = x_1^5 \pm \ldots \pm x_m^5$, где $m \leqslant 6$. В. И. Нечаев

1102. О проблеме Пруэт-Лемера. II. Састри (On Prouhet-Lehmer problem. II. Sastry S.), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 1, 90—92 (англ.)

Продолжение работы автора (J. Scient Res. Banaras Hindu Univ., 1951, 1, 1). Оценка, данная в I части, $P(6, q) \leqslant 5q + 1$, улучшена: $P(6, q) \leqslant 4q$. Дан пример решения в целых числах системы многостепенных уравнений при $q = 3$: $x_1^s + \cdots + x_{12}^s = y_1^s + \cdots + y_{12}^s = z_1^s + \cdots + z_{12}^s$ $(s = 1, \ldots, 6)$. В. А. Голубев

1103. Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$. Гельфонд А. О., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 2, 145—166

Работа состоит из двух частей. В первой части дано элементарное доказательство теоремы Дирихле в форме

$$\sum_{\substack{n \equiv a \pmod k \\ n \leqslant x}} \Lambda(n)/n = \varphi^{-1}(k) \ln x + O(1).$$

Кроме того, получено обобщение теоремы Дирихле для последовательности L, получаемой системой линейных подстановок $L_k(x) = mx + qm + k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$\sum_{\substack{p \equiv a \pmod k \\ p \in L,\ p \leqslant x}} \frac{\ln p}{p} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k) \ln m} \ln\left(1 + \frac{m-1}{(r+q)\, m - r}\right) \ln x + o(\ln x).$$

Во второй части показано, что отсутствие нулей у $\zeta(s)$ на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$ есть следствие двух тождеств для конечных сумм

$$\zeta(1 + i\tau) \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, n^{-(1+i\tau)} = O(\ln^2 \tau),$$

$$\zeta(1 + i\tau) \sum_{n \leqslant x} \mu(n)\, n^{-1} \ln x/n =$$

$$= \ln x + \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, n^{-1} + O(\ln^3 \tau).$$

Из них с привлечением некоторых дополнительных соображений получается оценка

$$|\zeta(1 + i\tau)| > \lambda / \ln^5 \tau, \qquad (1)$$

где λ — абсолютная положительная постоянная.

Этот результат обобщается на любой L-ряд. Кроме того, с помощью оценки (1) можно сдвинуть границу нулей влево за прямую $\mathrm{Re}\, s = 1$ и получить асимптотический закон распределения простых чисел с остаточным членом вида $x \exp(-\sqrt[9]{\ln x})$. А. И. Виноградов

1104. Некоторые новые результаты в теории дзета-функции. Гельфонд А. О., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 109

См. реф. 1103.

1105. О наименьших степенных невычетах по простым модулям. Фридлендер В. Р., Уч. зап. Елабужск. пед. ин-та, 1956, 1, 5—55

Доказывается ряд теорем о распределении простых чисел p, для которых $T_2(p) = p_k$ и $T_n(p) > p_k$ при $n = 2, 3, 4$, где $T_n(p)$ — наименьший невычет степени $n \pmod p$, p_k — простое число с порядковым номером k.

На основе теоремы Ю. В. Линника о наименьшем простом числе в прогрессии выводится оценка

$$T_2(p) = \Omega(\ln p). \qquad (1)$$

Дается обобщение теоремы Ю. В. Линника о количестве исключительных чисел: Пусть $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число; $n \geqslant 2$ — целое, положительное. Назовем исключительными числами n-й степени те простые числа p, для которых $T_n(p) > p^{\varepsilon}$, $(n;\ p-1) = n$.

Тогда при любом достаточно большом N и фиксированном $\alpha > 0$ количество $I(n)$ исключительных чисел n-й степени на сегменте $[N;\ N^{1+\alpha}]$ удовлетворяет неравенству

$$I(n) < (3\pi/2\sqrt{2})\,(n-1)^{-1} \sqrt{n/(n-1)}\, s!\ (s+2)^s,$$

где $s = [2(1+\alpha)/\varepsilon + 1]$.

В заключение формулируются пять гипотез, доказательство которых желательно для развития теории степенных невычетов.

Примечание референта. Результат (1), впервые опубликованный автором в 1949 г. (Докл. АН СССР, 1949, 66, № 3), совпадает с результатом Салие (Salie H., Math. Nachr., 1949—50, 3, № 1, 7). Н. В. Гордеев

1106. Элементарные оценки для наименьшего первообразного корня. Брауэр (Elementary estimates for the least primitive root. Brauer Alfred), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 20—29 (англ.)

Элементарными методами исследуется вопрос об оценке минимального положительного первообразного корня $g_0(p) \pmod p$ и $g_0(p^k) \pmod{p^k}$ $(k > 1,\ p$ — простое). Типичные теоремы (из 10 доказанных):

3. Пусть s — максимальная длина последовательностей последовательных чисел, которые все не взаимно просты с $p-1$. Тогда $|\gamma_0(p)| < p^{s/(s+1)}$, где $\gamma_0(p)$ абсолютно наименьший первообразный корень.

5. Пусть $p = 2^{\alpha} q + 1$; $q > \max\{11, 2^{\alpha-1}(3 + 2\sqrt{2})\}$. Тогда $g_0(p) < p^{1/2}$.

6. Пусть $p = 2q + 1$, где q—простое. Тогда

$$g_0(p) < (2p)^{2/3} + 3(2p)^{1/3} + 1.$$

10. Пусть $p > 5$; $p \equiv 1 \pmod 4$. Тогда существует по крайней мере $\{3\varphi(p-1)\}/4$ положительных первообразных корней $(\mathrm{mod}\, p^k)$, которые меньше p.

Ю. В. Линник

1107. О сумме $\Sigma_{n \leqslant x} \mu(n)/nd(n)$. Сельберг (Über die Summe $\Sigma_{n \leqslant x} \mu(n)/nd(n)$. Selberg Sigmund), 12 te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 264—272 (нем.)

Доказывается теорема: Если существует число x_0 такое, что $g(x)$ длявсех $x > x_0$ сохраняет знак, то $g(x) = O(1/\log x)$.

Так как $g(x)$ имеет конечное число перемен знака, а утверждение $g(x) = o(1)$ эквивалентно закону простых чисел, то последний является нетрудно выводимым следствием этого свойства.

Рассматриваются свойства функции $h(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)/nd(n)$. Например, $h(x) > 0$ для всех $x \geqslant 1$; $h(x) \leqslant 1$; существуют такие постоянные c_1 и c_2 (> 0), что для всех $x \geqslant 2$

$$c_2 (\log x)^{-0,7} < h(x) < c_1 (\log x)^{-1/2}.$$

Е. П. Ожигова

1108. О гипотезе Турана. Сельберг (Über eine Vermutung von P. Turan. Professor Viggo Brun zum 70. Geburtstag. Selberg Sigmund.), Kgl.

norske vid. selskabs forhandl., 1956, 29, № 8, S. 33—35 (нем.)

В предположении справедливости гипотезы Турана (Turan P., Kgl. danske videnskab. selskab Mat.-fys. medd., 1948, 24, № 17) доказывается для $H(x) = \sum_{n=1}^{x} L(n)$, где $L(x) = \sum_{n=1}^{x} \lambda(n) n^{-1}$, $\lambda(n)$ — функция Лиувилля,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} H(x)/\sqrt{x} \geqslant 2/3, \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} H(x)/\sqrt{x} < 10.$$

Доказательство опирается на работы автора (РЖМат, 1955, 1096; 1956, 5061). В. М. Архангельская

1109. Теоретико-плотностные теоремы теории простых чисел. Хорнфек (Dichtentheoretische Sätze der Primzahltheorie. Hornfeck Bernhard), Monatsh. Math., 1956, 60, № 2, 96—109 (нем.)

Вводится понятие асимптотической $\varphi(x)$-плотности множества целых чисел (Stöhr A., J. reine und angew. Math., 1952, 190, 199—230) и рассматриваются частные случаи зависимости плотности произведения подмножеств простых чисел от плотности сомножителей.

В. М. Архангельская

1110. Последовательность простых чисел с промежуточной плотностью. Голомб (Sets of primes with intermediate density. Golomb Solomon W.), Math. scand., 1955, 3, № 2, 264—274 (англ.)

Автор отмечает, как поразительный факт, то обстоятельство, что асимптотика распределения большинства естественно возникающих последовательностей простых чисел характеризуется формулами типа $S(x) \sim Ax/\log x$, где $S(x)$ — число членов последовательности, не превосходящих x, A — константа.

Множеством промежуточной плотности автор называет последовательность простых чисел, для которой $S(x)\log x/x \to 0$ при $x \to \infty$. Замечая, что близнецы имеют промежуточную плотность, он доказывает далее, что простые делители чисел вида $2^{2^n}+1$ (последовательность Ферма — Пойя), а также простые числа, связанные с некоторыми примерами арифметических полугрупп Винтнера, образуют последовательности промежуточной плотности. Работа имеет преимущественно описательный характер. Н. П. Романов

1111. Новые оценки на основе метода решета Вигго Бруна. Кун (Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode. Kuhn P.), 12 te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 160—168 (нем.)

Автор показывает, что в проблемах, решаемых методом Вигго Бруна и относящихся к почти простым числам (т. е. к числам, имеющим не более чем k простых делителей, где k — данное число), размеры числа k могут быть снижены при помощи вводимого им приема. Сущность этого приема нигде специально не выделяется и метод показывается на основе рассмотрения конкретных типических случаев. В частности, доказывается теорема: Если v — данное число, w — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству $\log(6v-w) \leqslant 0{,}968(w+1)$, то тогда при достаточно больших значениях x в интервале $(x - x^{1/v}, x)$ имеются числа, содержащие не больше чем $w+v$ простых делителей. При доказательстве используется неравенство В. А. Тартаковского (Докл. АН СССР, 1929, № 23, 121—125). Опираясь на усиление метода Вигго Бруна, данное А. А. Бухштабом (Докл. АН СССР, 1938, № 4, 375—386; 1940, № 29, 544—548), автор получает аналогичный результат для случая, когда неравенство $\log(6v-w) \leqslant 0{,}968(w+1)$ заменено неравенством $\log 5(6v-w)\cdot(w+6)^{-1} \leqslant 1{,}097(w+1)$. Н. П. Романов

1112. Значение одной дзета-функции Эпштейна, Блей (The value of a certain Epstein zeta function. Blij F. van der), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 1, 13—14 (англ.)

Пусть $r_k(n)$ обозначает число представлений натурального числа n суммою k квадратов целых чисел. Известно, что ряд $\zeta_k^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r_k(n) n^{-s}$ определяет функцию, аналитическое продолжение которой является целой функцией.

С помощью численных методов Эмерслебен (РЖМат, 1955, 3583) показал, что $\zeta_6^*(3) = -7{,}91368\ldots$ Используя одну известную формулу для $r_6(n)$, автор доказывает, что $\zeta_6^*(3) = -\frac{1}{2}\pi^3 \log 2 + \frac{3}{4}\pi\zeta(3)$, где $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана. Г. А. Ломадзе

1113. О дискриминантах эллиптических функций и их квадратных корнях. Шёнеберг (Über die Diskriminante der elliptischen Funktionen und ihre Quadratwurzel. Schoeneberg Bruno), Math. Z., 1956, 65, № 1, 16—24 (нем.)

Пока что мало изучена арифметическая природа коэффициентов Фурье разложений

$$\Delta(\tau) = \exp(2\pi i\tau) \prod_{n=1}^{\infty} (1-\exp 2\pi i\tau n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \exp 2\pi i\tau n \quad (\operatorname{Im}\tau > 0)$$

и

$$\sqrt{\Delta(\tau)} = \exp(2\pi i\tau/2) \prod_{n=1}^{\infty} (1-\exp 2\pi i\tau n)^{12} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 1 \pmod 2}} \tau_2(n) \exp(2\pi i\tau n/2) \quad \operatorname{Im}\tau > 0).$$

Основными результатами работы являются формулы

$$\tau(n) = (n^2/4)\{9\sigma_3(n) - 5\sigma_7(n)\} + 9\cdot 240 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \sigma_3(n-i)\sigma_3(i)$$

и

$$\tau_2(n) = n\{2\sigma_1(n) - \sigma_3(n)\} + 48 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (n-2i)\sigma_1(n-2i)\sigma_1'(i),$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $\sigma_1'(i) = \sum_{\substack{d\,|\,i \\ d\equiv 1 \pmod 2}} d$.

Эти соотношения получены с помощью некоторых положительно определенных квадратичных форм с 8 и 4 переменными и соответствующих шаровых функций.

Г. А. Ломадзе

1114. Об одной теореме Эрдёша и Каца. Деланж (Sur un théorème d'Erdös et Kac. Delange Hubert), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 2, 130—144 (франц.)

Пусть $f(n)$ — вещественная сильно аддитивная теоретико-числовая функция (РЖМат, 1956, 144), $A_k(x) = \sum_{p<x} f^k(p)/p$, где суммируется по всем простым $p < x$. Халберстам (РЖМат, 1956, 144) доказал, что если $f(p)$ равномерно ограничены для всех простых p и $A_2(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то для любого фиксированно-

го натурального q

$$A_2(x)^{-q/2}\sum_{n\leqslant x}\{f(n)-A_1(x)\}^q\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^q e^{-t^2/2}dt/\sqrt{2\pi} \qquad (1)$$

при $x\to\infty$, и отсюда вывел, что значения функции $f(n)$ распределены асимптотически по нормальному закону. Автор упрощает доказательство Халберстама и показывает, кроме того, что (1) сохраняет силу, если $f(p)=o\{A_2(p)^{1/2\gamma}\}$ при $p\to\infty$. И. П. Кубилюс

1115. Число точек решетки в множестве. Роджерс (The number of lattice points in a set. Rogers C. A.), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 22, 305—320 (англ.)

Пусть $\rho(X)=\rho(x_1,\ldots,x_n)$ — неотрицательная измеримая по Борелю функция в n-мерном пространстве. Для любой решетки Λ пусть $\rho(\Lambda)=\Sigma\rho(X)$, где сумма берется по всем $X\in\Lambda$, $X\neq 0$. Определим функцию $\rho^*(X)$, полагая ее равной $\sup\rho(Y)$ по всем Y при $X=0$, а при $X\neq 0$ равной нижней грани чисел ρ таких, что мера множества точек Y с $\rho(Y)>\rho$ не превосходит меры множества точек Y, которые отдалены от начала не более чем X. Пусть $\mu(\Lambda)$ — инвариантная мера в пространстве решеток с определителем 1 (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, 46, 340—347), нормированная так, чтобы интеграл $\int d\mu(\Lambda)$ по всему пространству равнялся 1.

Доказывается: если $\rho(X)$ такая, что для любого $c>0$ множество точек X с $\rho(X)>c$ является выпуклым, то имеют место следующие неравенства для моментов ($k=1,2,\ldots$)

$$\int\{\rho(\Lambda)\}^k d\mu(\Lambda)\leqslant\int\{\rho^*(\Lambda)\}^k d\mu(\Lambda). \qquad (1)$$

Высказывается гипотеза, что для справедливости (1) выпуклость указанных множеств не является необходимым. Это предположение доказывается для $k=1,2,3$, причем знак $<$ в (1) при $k=1$ можно пропустить.

Для случая, когда $\rho(X)$ является характеристической функцией борелевского множества S с объемом V, симметричного относительно начала координат, дается оценка для k-х моментов $\int\{\rho(\Lambda)\}^k d\mu(\Lambda)$ при $n\geqslant[k^2/4]+3$ сверху и снизу, из которой следует, что

1) при фиксированном V число пар точек $\pm X$ решетки Λ в S имеет распределение, которое при $n\to\infty$ стремится к распределению Пуассона с параметром $V/2$;

2) при достаточно большом n и $V\leqslant\sqrt{n}/3$ существует решетка Λ с определителем 1, которая не имеет точек в S, за исключением, быть может, начала (усиление теоремы Минковского — Главка). И. П. Кубилюс

1116. О применении теории суммирования случайных величин в теории аддитивных арифметических функций. Кубилюс И., Darbai Fizikos-techn. inst. Lietuvos TSR Mokslų Akad.,Тр. Физ.-техн. ин-та АН ЛитССР, 1955, 1, 5—24 (рез. лит.)

Сильно аддитивная арифметическая функция $f(m)$ называется принадлежащей к классу H, если $B(u)=\sum_{p\leqslant u}f^2(p)\,p^{-1}\to\infty$ при $u\to\infty$ и существует функция $\alpha(n)$ такая, что $\ln\alpha(n)=o(\ln n)$ и $B(n)-B(\alpha(n))=o(B(n))$. К этому классу принадлежат, в частности, и функции такие, что $B(u)\to\infty$ и $|f(p)|\leqslant 1$, изучавшиеся Эрдёшем и Кацом (Erdös P., Kac M., Amer. J. Math., 1940, 62, 738—742).

Доказываются 4 теоремы, дающие необходимые и достаточные условия для существования асимптотической функции распределения для последовательностей серий векторов, построенных из функций класса H. Результаты содержат, в частности, результаты Эрдёша и Каца (цитированная работа) и Левека (Le Veque W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 440—463). Однако результаты автора шире и содержат такие случаи, когда, помимо нормального закона, появляются другие предельные законы. При исследовании существенно используется метод эратосфенова решета (лемма 1).

Опечатки: на стр. 19 должно быть $\Pi_{1\leqslant m<y}\chi(m)\leqslant\Pi_{q\leqslant\alpha}q^{\sum_{r=1}^{\infty}[y/q^r]}$ А. Г. Постников

1117. Вероятностные методы в теории чисел. Кубилюс И. П., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 31—66

Обзор некоторых применений теории вероятностей к проблемам теории чисел. § 1 посвящен распределению значений сильно аддитивных функций и включает, в частности, результаты автора (РЖМат, 1955, 5588; 1956, 1938; реф. 1116). § 2 посвящен вероятностной трактовке «большого решета» Ю. В. Линника (Линник Ю. В., Докл. АН, 1941, 30, 290—292), данной А. Реньи; § 3 посвящен вероятностной интерпретации одной леммы, применяющейся в арифметике кватернионов (реф. 1118).

Имеется список литературы, включающий 102 названия, охватывающий работы по приложению теории вероятностей к теории чисел.

Замечены опечатки: на стр. 35 следует читать $S\leqslant n\ln\ln n$; на стр. 39 — при $p>m$, на стр. 41 — $\Pi_{m\leqslant n}\chi(m)\leqslant\Pi_{p<\alpha}p^{\sum_{r=1}^{\infty}[n/p^r]}$.

А. Г. Постников

1118. Применение теории цепей Маркова в арифметике кватернионов. Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, вып. 4, 203—210

А. В. Малышев (РЖМат, 1954, 5438) доказал асимптотический закон для представления целых чисел «удобными» тернарными квадратичными формами.

Доказательство этого закона существенно опирается на лемму: Пусть $R^{(1)},\ldots,R^{(\sigma_r)}$ — все примитивные и не ассоциированные справа кватернионы нормы r; ρ — малая константа; $s=[(1/2+\rho)\ln m/\ln r]$, W — число всех примитивных произведений $B=R_1\ldots R_s$, где R_j — какие-либо из $R^{(1)},\ldots,R^{(\sigma_r)}$.

Тогда число всех примитивных произведений B, где заданный кватернион $R^{(i_0)}$ встречается в качестве R_j не более чем $(1-\varepsilon)s/\sigma_r$ раз, причем $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое фиксированное число, не превосходит $c(\varepsilon)W\exp\{-s\eta(\varepsilon)\ln r\}$, где $c(\varepsilon)$ и $\eta(\varepsilon)$ — положительные числа, зависящие от ε.

Автор выясняет теоретико-вероятностную природу этой леммы и дает ее доказательство при помощи теории цепей Маркова. Кватернионы $R^{(1)},\ldots,R^{(\sigma_r)}$ рассматриваются как состояния некоторой системы, а примитивные произведения $B=R_1\cdots R_s$ — как возможные пути системы по этим состояниям. И. П. Кубилюс

1119. Квадратичные формы и эйлеровы произведения. Блей (Quadratic forms and Euler products, Blij F. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, A59, № 2, 229—237, Indagationes math, 1956, 18, № 2, 229—237 (англ.)

Ряды Дирихле, соответствующие числу представлений натурального числа положительными бинарными квадратичными формами, могут быть записаны в виде Эйлеровых произведений.

В случае небинарных квадратичных форм, соответствующие ряды Дирихле вообще не являются эйлеровыми произведениями, а есть линейные комбинации

эйлеровых произведений. Однако, взяв линейные комбинации рядов Дирихле различных дискриминантов, получим эйлерово произведение.

Впервые Гекке (Hecke E., Kgl. danske videnskab. selskab Math.-fys. Medd., 1940, **17**, 12, теорема 50) построил такой пример для квадратичной формы и ее сопряженной.

Пользуясь формулой Зигеля (Siegel C. L., Ann. Math., 1943, **44**, 166) для рядов Дирихле, автор получает аналогичные результаты, но не для отдельной формы, а для всех классов соответствующего рода квадратичных форм. Г. А. Ломадзе

1120. Некоторые применения геометрии Лобачевского к теории характеров Дирихле. Линник Ю. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 7 Обзорный доклад.

1121. Пары квадратичных форм над полным дискретно-нормированным полем с конечным полем классов вычетов. Демьянов В. Б., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 3, 307—324

Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\overline{K}$ — поле классов вычетов по простому идеалу кольца целых элементов из K.

Доказывается, что, если поле классов $\overline{K}$ конечно, то для любой пары квадратичных форм $f(x_1,..,x_m), g(x_1,..,x_m)$ над K система уравнений

$$f(x_1, \ldots, x_m) = 0, \quad g(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

имеет при $m > 8$ нетривиальное решение в K.

Б. М. Уразбаев

1122. Метрика Вороного и метрика Лобачевского в геометрии чисел. Венков Б. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 5

Краткое изложение содержания доклада о параллелоэдрах и арифметико-геометрических задачах теории квадратичных форм.

1123. Некоторые замечания о кубических поверхностях в рациональном поле. Сегре (Alcune osservazioni sulle superficie cubiche nel campo razionale. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 2, 147—149 (итал.)

Приводятся соображения в пользу одного необходимого и достаточного условия того, чтобы рациональную кубическую поверхность, не имеющую кратных точек, с помощью некоторого преобразования, можно было перевести в рациональную кубическую поверхность, обладающую рациональной тройкой двойных точек. Г. А. Ломадзе

1124. Квадратичный закон взаимности. Анкень (The law of quadratic reciprocity. Ankeny N. C.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1955, **28**, № 26, 145—149 (англ.)

Пусть ζ_h — первообразный корень из единицы степени h, K_h — поле, полученное присоединением ζ_h к полю рациональных чисел, и j' определяется из сравнения $jj' \equiv 1 \pmod p$. Используя критерий Эйлера для квадратичных вычетов, автор показывает, что $(d/p) = \prod_{j=1}^{p-1} (\lambda_{dj'})^j (\lambda_{j'})^{-j}$, где $\lambda_c = \zeta_p^c - \zeta_p^{-c}$. Квадратичный закон взаимности легко получается из равенства $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = \prod_{\substack{(tm)=1 \\ 0<t<m}} (\zeta_m^{t'} - \zeta_m^{-t'})^t$, где $m = pq$ и $tt' \equiv 1 \pmod m$. М. А. Пробст

1125. Диофантовы уравнения, не имеющие решений. Селфридж, Никол, Вандивер (On diophantine equations which have no solutions. Selfridge J. L., Nicol C. A., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 5, 264—266 (англ.)

Работа в основном посвящена уравнениям вида:

$$1 + ax^c \equiv by^l \pmod p, \qquad (1)$$

где p — простое, растущее вместе с c при условии $cl = p - 1$; l, c — целые, $axby \not\equiv 0 \pmod p$.

Дан обзор результатов исследований уравнений (1) с помощью быстродействующих вычислительных машин. Обсуждаются возможности применения построенных таким образом таблиц для уравнений с большим количеством неизвестных. П. Н. Реморов

1126. О простых делителях однородных многочленов, разлагающихся на линейные множители в нормальном поле. Куллен (On the prime divisors of homogenous polynomials which decompose into linear factors in a normal field. Kolden K.), 12 te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 139—159 (англ.)

Рассматриваются однородные многочлены $f(x_1, \ldots, x_m)$ степени n с целыми рациональными коэффициентами, для которых в некотором нормальном поле K степени n имеет место разложение

$$f = \prod_{\sigma \in G} (\alpha_1^\sigma x_1 + \cdots + \alpha_m^\sigma x_m) = A_1 x_1^n + \cdots + A_m x_m^n + \cdots,$$

где G — группа Галуа поля K, α_i — целые. Вводится понятие дискриминанта $\Delta(f)$ для форм указанного вида и доказывается, что при $p \mid f(x_1, \ldots, x_m)$, $p \nmid (x_1, \ldots, x_m) A_1 \ldots A_m$, $p \nmid \Delta(f) \not\equiv 0$ простое рациональное число p разлагается в поле K в произведение n различных простых идеалов (первой степени). Устанавливаются некоторые результаты и для случая $\Delta(f) = 0$. З. И. Боревич

1127. Локальная теория идеальных чисел по Золотареву для целых (комплексных) чисел Дирихле. Попович (Teoria locală a numerelor ideale după Zolotarev în cazul întregilor lui Dirichlet. Popovici Constantin P.), Studii şi cercetări mat., 1956, 7, № 1-2, 37—79 (рум.; рез. русс., франц.)

Изложены некоторые вопросы теории делимости целых комплексных чисел Дирихле (Dirichlet L. G., J. reine und angew. Math., 1842, **24**, № 4, 291) с точки зрения теории идеальных чисел Золотарева (Zolotarev E. G., J. Math., Paris, 1880, **6**, 51, 129). А. И. Попов

1128. Заметка о неособенных формах в конечном поле. Карлиц (A note on nonsingular forms in a finite field. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 27—29 (англ.)

В поле $GF(p^n)$, $p > 2$, строятся однородные многочлены $f_1, \ldots, f_r$ степени m, $(m, p) = 1$, от r переменных, которые одновременно обращаются в нуль только в точке $(0, \ldots, 0)$ и для которых форма $f = \xi_1 f_1 + \cdots + \xi_r f_r$ не имеет особенных точек (кроме точки $(0, \ldots, 0)$) при произвольных $\xi_i \in GF(p^n)$, не равных нулю одновременно. З. И. Боревич

1129. Разрешимость некоторых уравнений в конечном поле. Карлиц (Solvability of certain equations in a finite field. Carlitz L.), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 25, 3—4 (англ.)

Дается обобщение теоремы Шварца (Schwarz St., Quart. J. Math. (Oxford), 1948, **19**, 160—163). Пусть $q = p^n$, p — простое, $GF(q)$ — конечное поле порядка q, $k \mid p - 1$ и $a_1, \ldots, a_k$ — отличные от нуля в $GF(q)$ числа.

Доказывается:

1. Если $g(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольный полином с коэффициентами из $GF(q)$ и степенью меньшей k, тогда уравнение

$$a_1 x_1^k + \cdots + a_k x_k^k = g(x_1, \ldots, x_k) \qquad (1)$$

имеет по крайней мере одно решение в этом поле.

2. Если в левой части (1) имеется однородный полином степени k, удовлетворяющий условию $\sum_{x_1,\ldots,x_k} \times$ $\times f^{p-1}(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$, то уравнение имеет по меньшей мере одно решение. П. Н. Реморов

1130. Некоторые специальные уравнения в конечном поле. Карлиц, Корсон (Some special equations in a finite field. Carlitz L., Corson H. H.), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 2, 114—122) (англ.)

Пусть N — число решений уравнения

$$a_1 x_1^{m_1} + \cdots + a_r x_r^{m_r} = c \qquad (1)$$

в поле $GF(q)$, $q = p^r$, где p — простое число.

Даны сведения о зависимости N от a_i при некоторых значениях m_i и c. Рассматриваются обобщения (1) на случай, когда вместо $x_j^{m_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$ помещаются соответственно рациональные функции $f_j(u_j)$ $(j = 1, \ldots, r)$. Наиболее существенные результаты работы состоят в доказательстве теорем, данных авторами ранее без доказательства (РЖМат, 1956, 4310). П. Н. Реморов

1131. Одна элементарная теорема теории простых чисел. Кубилюс И. П., Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 191—192

Вопрос о бесконечности простых чисел p, представимых в форме $p = k^2 + l^2$, где $l = O(\ln p)$, требует привлечения гипотезы Римана для Z-функций Гекке поля $R(i)$ (Кубилюс И. П., Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 5). В реферируемой работе доказывается, что аналогичный вопрос для случая, когда простые числа заменены произведением двух простых, не требует привлечения трансцендентных методов и может быть решен совершенно элементарно на основе принципа Дирихле. Н. П. Романов

1132. О «дружественных» числах. Эрдёш (On amicable numbers. Erdös P.), Publs mat., 1955, **4**, № 1—2, 108—111 (англ.)

Обозначим через $\sigma(n)$ сумму делителей n. Два числа a и b называются «дружественными», если $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$. Неизвестно, бесконечно ли множество таких чисел. Показывается, что плотность множества «дружественных» чисел равна нулю. Число «дружественных» чисел, меньших n, оказывается меньше, чем $cn/\log\log n$. Е. П. Ожигова

1133. Структурный полином латинских прямоугольников и его применение к комбинаторной проблеме. Ямамото (Structure polynomial of Latin rectangles and its application to a combinatorial problem. Yamamoto Koichi.), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, **A10**, № 1, 1—13 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1954, 3963).

Рассматриваются трехстрочные латинские прямоугольники. Дана рекуррентная формула и устанавливается связь с проблемой Тушара о перестановках. В. А. Голубев

1134. Работы Гаусса по теории чисел. Делоне Б. Н., В сб.: Карл Фридрих Гаусс. М., АН СССР, 1956, 11—112

Излагаются арифметические работы К. Ф. Гаусса и влияние их на современную теорию чисел.

Автор включил в статью некоторые фундаментальные вопросы современной теории чисел: теорию алгебраических чисел, теорию идеалов Дедекинда, теорию побочных решеток Клейна, законы взаимности вообще, теорию полей классов. Автор, перечисляя все принципиальные вопросы, вошедшие в «Арифметические исследования» Гаусса, одновременно трактует их с современной точки зрения алгебраической теории чисел. «Арифметические исследования» К. Ф. Гаусса разделены на семь разделов. Результаты работ предшествующих ученых частично трактуются в том или ином из этих разделов. В четвертом, пятом и седьмом разделах книги содержатся открытия самого Гаусса: 1) доказательство закона взаимности, 2) теория композиции квадратичных форм и теория их родов, 3) теория деления круга. Два других открытия Гаусса в теории чисел: 4) гауссовы суммы и 5) арифметика целых комплексных чисел опубликованы в 1811 и в 1828—1832 гг.

Подчеркивается, что важность мемуара Гаусса о биквадратичных вычетах заключается в том, что этим был сделан существенный шаг в построении теории алгебраических чисел. Поясняя законы взаимности с точки зрения теории алгебраических чисел и перечисляя крупных математиков, занимавшихся отысканием общих законов взаимности, автор отмечает, что в этом вопросе наибольшего успеха добился в самые последние годы советский математик И. Р. Шафаревич, который доказал общий закон взаимности. Дано освещение теории Гаусса композиции классов с геометрической точки зрения (по Клейну), а также с точки зрения теории алгебраических чисел. Подробно анализируя теорию деления круга Гаусса, автор показывает связь этой теории с теорией Галуа. Излагая метод Гаусса определения знака гауссовой суммы, автор останавливается на характерных этапах развития теории тригонометрических сумм в аналитической теории чисел и объясняет причину успешного применения тригонометрических сумм в теории чисел.

В работе широко показана выдающаяся роль советских математиков И. М. Виноградова, И. Р. Шафаревича, Н. Г. Чеботарева, Б. Н. Делоне и Б. А. Венкова в отношении развития работ Гаусса. С. В. Огай

1135. Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы. Линник, Малышев (Application of the arithmetic of quaternions to the theory of ternary quadratic forms and to the decomposition of numbers into cubes. Linnik Yu. V., Malyšev A. V.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, **3**, Ser. 2, 91—162 (англ.)

1136. О лемме Золотарева и о законе взаимности квадратичных вычетов. Рисс (Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques. Riesz Marcel), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, **12**, (франц.)

См. РЖМат, 1954, 1975.

1137 К. Аддитивная теория чисел. I часть. Общие исследования. II часть. Специальные числовые множества. Остман (Additive Zahlentheorie. I. Teil. Allgemeine Untersuchungen. II. Teil. Spezielle Zahlenmengen. Ostmann Hans-Heinrich), Ergebn. Math., 1956, № 7, 233 S., № 11, 136 S. (нем.)

Книга содержит весьма обширный материал по общей аддитивной теории чисел, изучающей законы сложения числовых последовательностей общего вида и выросшей из классических проблем Эйлера, Варинга и Гольдбаха, с одной стороны, и фундаментальной работы Л. Г. Шнирельмана (Изв. Политехн. ин-та Новочеркасска, 1930, 14, 3—28) — с другой. Книга носит справочный характер; доказательства в ней, в основном, лишь намечены.

Часть I содержит 17 глав. Гл. 1. Понятие суммы. Рассматривается множество Σ всех множеств неотрицательных целых чисел. Вводятся различные понятия суммы множеств. Эти понятия исследуются с точки зрения теоретико-структурной и тополо́гической. Гл. 2. Множества с относительными нулями. Относительным нулем называется множество, не изменяющее данного при сложении. Исследуются множества, имеющие нетривиальные относительные нули, и связь их с разложением множеств на слагаемые. Гл. 3. Базисы. Излагаются элементарные свойства базисов конечного порядка. Гл. 4. Связь с диофантовыми уравнениями. Простейшие связи понятия сложения числовых множеств с классическими диофантовыми уравнениями. Гл. 5. Индексы Ферма. Для множества $\mathfrak{A}$, не содержащего 0, индексом Ферма $f(\mathfrak{A})$ называется минимальное целое n, для которого $\mathfrak{D}= n\mathfrak{A}\bigcap\mathfrak{A}$ не пусто (Г. Остман). Изучаются свойства $f(\mathfrak{A})$. Гл. 6.. Обобщения Σ. Гл. 7. Перечисляющая функция (Anzahlfnuktion), составления, разбиения. Перечисляющая функция $M(x, y)$ множества $\mathfrak{M}$ — число его элементов в $[x + 1, y]$. После общих теорем об этих функциях, рассматриваются производящие степенные ряды и ряды Дирихле, методы вычисления коэффициентов по Харди-Литлвуду и И. М. Виноградову (только основная идея), в виде примеров работ с производящими степенными рядами — классические работы Эйлера, английской школы XIX в., Харди и Рамануджана и по разбиениям чисел и современные дополнения к ним — Г. Мейнардуса, Г. Петерсона и др. Гл. 8. Различные понятия плотности. Основное определение Л. Г. Шнирельмана и его модификации, в частности, А. Штора; определение плотности по Дирихле; тауберова теорема С. Икегара. Гл. 9. Перечисляющая функция приводимых множеств. Приводимыми называются множества, допускающие нетривиальные разложения на суммы. Общие теоремы, результаты П. Шерка и Н. П. Романова. Гл. 10. Двучленная верхняя асимптотическая плотность. Определение и некоторые теоремы автора. Гл. 11. Арифметические (понятия) плотности приведенных множеств. Фундаментальная теорема Г. Манна о плотности суммы множеств, варианты доказательства ее Артина и Шерка; обобщения Ф. Дайсона. Результаты Д. А. Райкова. Теоремы о плотностях сумм множеств по А. Безиковичу. Гл. 12. Асимптотические плотности приведенных множеств. Невозможность обобщить теоремы Г. Манна и Ф. Дайсона на асимптотические плотности (М. Кнёзер). Невозможность получения нетривиальных оценок сверху для плотностей сумм множеств (теорема Г. Лоренца). Гл. 13. Точность оценок в главах 9, 11, 12. Гл. 14. Базисы конечного порядка. Определение Л. Г. Шнирельмана устойчивого базиса; достаточные условия базисности, в частности — различные условия Л. Г. Шнирельмана и дополнения Э. Вирзинга. Гл. 15. Минимальные базисы. Определение по А. Рорбаху, теоремы Д. А. Райкова и А. Штора. Указания на применения к электротехнике (А. Брауэр). Гл. 16. Существенные компоненты. Так называются множества, увеличивающие плотность всякого множества, положительной плотности <1. Теорема П. Эрдеша — всякий базис — существенная компонента. Невозможность обращения этой теоремы (Ю. В. Линник). Результаты Д. А. Райкова и Л. Шатровского). Гл. 17. Другие связи с сопоставленными двоичными дробями. Теоремы о плотностях множеств из Σ, устанавливаемые с помощью двоичных разложений (Б. Фолькман). Метрические теоремы о множествах нулевой плотности, получаемые исследованием сопоставленных двоичных дробей и понятий хаусдорфовой меры.

Часть II. (6 глав). Гл. 18. Некоторые соотношения между плотностями. Рациональные и псевдорациональные множества. Множество $\mathfrak{A}=\{a_0, a_1, a_2\ldots\}$ отображается на двоичную дробь $\rho(\mathfrak{A}) = \sum_{i\geqslant 0} 2^{-a_i-1}$; если $\rho(\mathfrak{A})$ рационально (ирррационально), то $\mathfrak{A}$ называется рациональным (иррациональным), множество $\mathfrak{D}\subset\Sigma$ называется псевдорациональным, если при каждом ε есть рациональные множества $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и $\mathfrak{R}^\varepsilon$ с плотностью разности меньше ε, такие, что $\mathfrak{R}_\varepsilon<\mathfrak{D}<\mathfrak{R}^\varepsilon$ (Б. Фолькман). Изучается поведение плотностей таких множеств. Гл. 19. Кратные множества, производящие множества. Понятия, введенные автором по аналогии с арифметической функцией $\sigma(m)$ (сумма делителей m). С ним связаны работы по распределению чисел, свободных от k-х степеней (С. Эвелин, Э. Линфут), и разложению на подобные числа (Т. Эстерман и др.). Гл. 20. Множества, производимые мультипликативными арифметическими функциями. Здесь переносятся некоторые результаты, по существу принадлежащие вероятностной теории чисел без использования вероятностных средств и формулировок. Гл. 21. Простые числа и родственные им множества. Классические теоремы Чебышева, закон простых чисел (понятие о методе ζ-функции и об элементарном методе А. Сельберга). Теорема И. М. Виноградова. Работы Н. Г. Чудакова, И. ван дер Корпута, Ю. В. Линника. Работы Э. Ландау о распределении чисел с простыми множителями из предписанных множеств. Гл. 22. Множество k-х степеней. Проблема Варинга. Работы Д. Гильберта и Л. Г. Шнирельмана Элементарный метод Ю. В. Линника и его развитие Г. Ригером. Оценки Л. Диксона и И. Нивена. Теорема И. М. Виноградова. Результаты Б. И. Сегала. Индексы Ферма (см.гл. 5). Теорема Ферма. Краткое изложение метода Э. Куммера и его теорем. Работы Г. Вандивера и других. Гл. 23. Другие специальные результаты. Подробный список литературы, доведенный до 1955 г. Авторский и предметный списки. Ю. В. Линник

1138 К. Основы теории чисел. Виноградов (Elemente der Zahlentheorie 6. Aufl. Winogradow I. M., Übers. aus dem Russ. München, Oldenbourg, 1956, VIII, 156, S., 10.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 23, 1640 (нем.)

1139 К. Введение в теорию чисел. Шольц (Einführung in die Zahlentheorie. Scholz Arnold. 2. Aufl. Überarb. Schoeneberg Bruno. Berlin, de Gruyter, 1955, 128 S., 2.40 (DM.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 17, 1234 (нем.)

1140 К. Теория чисел. Лежандр (Théorie des nombres 4 éd. Legendre Adrien-Marie. Paris, A. Blanchard, 1955, 2 vol. ill., 4 500 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 15, 343 (франц.)

1141 Д. Некоторые вопросы теории полуправильных непрерывных дробей второго порядка. Мещеряков А. С. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1956

См. также: 1265

АЛГЕБРА

1142 К. Высшая алгебра. Ч. I—III. Мостовский, Старк (Algebra wyższa. Mostowski Andrzej, Stark Marceli, Warszawa, Pol. Tow. Mat., Cz. 1, 1953, 308 str., 19 zł.); Cz 2, 1954, 173 str., 19 zł; Cz. 3, 1954, 273 str. 17 zł 30 gr.) (польск.) Учебник алгебры для университетов в трех томах.

Содержание. Том I: I. Введение. II. Комбинаторика. III. Комплексные числа. IV. Определители. V. Линейные пространства и уравнения. VI. Линейные преобразования. VII. Линейные и квадратичные формы. VIII. Геометрическая теория линейных преобразований и эрмитовых форм. Том II: IX. Многочлены от одного переменного. X. Кольца многочленов от одного переменного над полями вещественных и комплексных чисел. XI. Уравнения второй, третьей и четвертой степеней. XII. Многочлены от многих переменных и симметрические функции. XIII. Кольцо многочленов от одного переменного над полем рациональных чисел; алгебраические и трансцендентные числа. XIV. Теория исключения. Том III: XV. Группы. XVI. Кольца и абстрактные поля. XVII. Теория Галуа. XVIII. Нормальные формы линейных преобразований.

В третьем томе имеются ошибки. Например, определение базиса, абелевой группы на стр. 50 сформулировано неверно. В упражнениях № 1 на стр. 18, № 2 на стр. 21, № 6 на стр. 23, № 1 на стр. 43, № 4 на стр. 97, № 3 на стр. 103, № 4 на стр. 138 предлагается доказать неверные утверждения и т. д. J. Łoś

1143 К. Курс высшей алгебры. [Учеб. пособие для пед. ин-тов]. Изд. 2-е, переработ. **Ляпин Е. С.**, М., Учпедгиз, 1955, 368 стр., 8 р. 60 к.

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1144. Теория размещений с ограничением — обобщение треугольника Паскаля. Фрёйнд (Restricted occupancy theory — a generalization of Pascal's triangle. Freund J. E.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 1, 20—27 (англ.)

Пусть $N_m(r, k)$ — число различных распределений r неразличаемых предметов в k клетках при условии, что в каждой клетке находится не более m предметов, и $N(r, k)$ — число различных распределений r предметов в k клетках без указанного ограничения. Доказаны рекуррентные формулы

$$N_m(r, k) = \sum_{j=0}^{m} N_m(r-j, k-1);$$

$$N(r, k) = \sum_{j=0}^{r} N(r-j, k-1).$$

Приведены таблицы значений функции $N_m(r, k)$ для $m = 1, 2, 3$ и таблица значений $N(r, k)$; все таблицы доведены до $k = 5$. Замеченная опечатка: в последнем члене формулы на стр. 27 вместо r должно быть $r-1$. Е. Г. Гонин

1145. Об одном неравенстве для неопределенной формы. Белман (On an inequality concerning an indefinite form. Bellman Richard), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 2, 108—109 (англ.)

Пусть $\varphi(x) = (x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p)^{1/p}$, где $x_i \geqslant 0$; $x_1 > (x_2^p + \cdots + x_n^p)^{1/p} (p \geqslant 1)$. Доказано, что $\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y)$. С. Д. Берман

1146. О разложении билинейной формы в сумму произведений. Ионеску (O identitate importantă şi descompunere a unei forme bilineare intr-o sumă de produse. Ionescu D. V.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, A7, № 7, 303—312 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть функция $\Phi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ однородна относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ в отдельности с показателями однородности p и q соответственно и пусть $\Delta_i = \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} \right|_{\alpha, \beta=1}^{i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;$ $\Delta_0 = 1)$. Пусть далее X_i — определитель, получающийся из определителя Δ_i аменой производных $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_i}, \ldots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{i-1} \partial y_i}$ на производные $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{i-1}}$ а Y_i — определитель, получающийся заменой производных $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_1}, \ldots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_{i-1}}$ на производные $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{i-1}}$. Доказывается, что $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i Y_i}{\Delta_{i-1} \Delta_i}$ При $p = q = 1$ из этого тождества получается представление квадратичной формы в виде суммы квадратов. Ф. Р. Гантмахер

1147. Доказательство теоремы Гильберта о корнях. Моцкин (A proof of Hilbert's Nullstellensatz Motzkin Theodore S.), Math. Z., 1955, **63**, № 3, 341—344 (англ.)

Передоказывается известная теорема о существовании для произвольной несовместной системы алгебраических уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ от n неизвестных с коэффициентами из поля K таких многочленов $g_1, \ldots, g_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$, что $\sum_{i=1}^{r} f_i g_i = 1$. Если степень каждого из многочленов $f_1, \ldots, f_r$ не превышает d, то степени многочленов $g_1, \ldots, g_r$ не больше числа $d_n \leqslant (d_{n-1} + d)\,\delta_{n-1} - d$, где $\delta_{n-1} \leqslant \leqslant \binom{n + d_{n-1} + d}{n+1} - \binom{n + d_{n-1}}{n+1}$, $d_1 = d - 1$ (если $d > 0$) и $\delta_1 = d^2$. Число δ_n обладает тем свойством, что для любого конечного множества многочленов $f_1, \ldots, f_r \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$, степени которых не превышают d, из того, что система уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ не имеет решения в алгебраическом замыкании поля $K(y)$, следует существование таких многочленов $g_1, \ldots, g_r \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$, что $\sum_{i=1}^{r} f_i g_i = a$, где $a \in K[y]$, причем степень многочлена a не превышает $\delta_n - d$. Доказывается также, что каждая несовместная система алгебраических уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ от n неизвестных, для которой степень каждого из многочленов f_i не превышает d, содержит несовместную подсистему, состоящую не более чем из $\binom{n+d}{n}$ уравнений. Из этого утверждения следует, что размерность в смысле Хелли (система подмножеств имеет размерность $r_0 - 1$ в смысле Хелли, если каждая ее подсистема с пустым пересечением содержит подсистему, состоящую из не более чем из r_0 подмножеств и также обладающую пустым пересечением) некоторой системы гиперповерхностей порядка d n-мерного аффинного или проективного пространства не превышает $\binom{n+d}{n} - 1$; причем если координатное поле бесконечно, то эта размерность точно равна $\binom{n+d}{n} - 1$. Е. Г. Шульгейфер

1148. О некоторых экспоненциальных и полярных представлениях матриц. Брёйн, Секереш (On some exponential and polar representations of matrices. Bruijn N. G. de, Szekeres G.), Nieuw arch. wiskunde, 1955, **3**, № 1, 20—32 (англ.)

Пусть C — операция транспонирования матриц, T — операция перехода к комплексно-сопряженной матрице, I — операция взятия обратной матрицы и P — одна из операций T, CI, TC. Доказано, что любая неособенная матрица является произведением KB, где $K^P = K$ и $B^{IP} = B$. Это представление определяется

однозначно, если потребовать, чтобы все собственные значения матрицы K находились в области $-\frac{1}{2}\pi < \arg\lambda \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Таким образом, любую неособенную матрицу можно представить в виде произведения: 1) симметрической и ортогональной матриц; 2) эрмитовой и унитарной матриц; 3) круговой (матрица A называется круговой, если $A^{CI} = A$) и вещественной матриц. Для ортогональной матрицы, матрицы K и B можно выбрать ортогональными; аналогичные результаты получаются для некоторых других классов матриц, в частности, получен один результат Ф. Р. Гантмахера (Матем. сб., 1939, 5 (47), 217—249).

В заключение изучаются представления, аналогичные представлению вида $A = U_1 D U_2$, где U_1, U_2 — унитарные матрицы, а D — диагональная матрица с положительными собственными значениями, и даются необходимые и достаточные условия представимости неособенной матрицы в виде одного из произведений AA^T, AA^{CI}, AA^{TC}.

М. А. Наймарк

ГРУППЫ

1149. Критические пары подмножеств группы простого порядка. Воспер (The critical pairs of subsets of a group of prime order. Vosper A. G.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 200—205 (англ.)

Пусть G — циклическая группа простого порядка p в аддитивной записи и A, B — ее непустые подмножества. Как известно (Cauchy A., J. de l'Ecole Polytechnique, 1813, **9**, 99—116),

$$n(A+B) \geqslant \min\{p;\ n(A)+n(B)-1\},$$

где $n(S)$ — число элементов множества S. Доказано, что в этом неравенстве тогда и только тогда имеет место знак равенства, когда выполняется одно из следующих условий:
1) $n(A)+n(B) > p$; 2) $\min\{n(A), n(B)\} = 1$; 3) $A = G \setminus (a - B)$ $(a \in G)$; 4) $A = \{\alpha, \alpha+\delta, \ldots, \alpha+(n(A)-1)\delta\}$; $B = \{\gamma, \gamma+\delta, \ldots, \gamma+(n(B)-1)\delta\}$ $(\alpha, \delta, \gamma \in G)$.

С. Д. Берман

1150. О предположении Фробениуса. Фейт (On a conjecture of Frobenius. Feit Walter), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 177—187 (англ.)

Пусть G — группа порядка qm, где $(q, m) = 1$, и M — множество всех элементов группы, порядки которых делят число m. Доказано, что подмножество M тогда и только тогда является нормальным делителем порядка m группы G, когда G содержит такую подгруппу Q порядка q, что каждый элемент $a \in G$, порядок которого делит q, сопряжен с некоторым элементом подгруппы Q, причем $o(M \cap N_a) = (m, o(N_a))$, где N_a — нормализатор элемента a в группе G (через $o(A)$ обозначается число элементов подмножества $A \subset G$). Если $o(M) = m$, то M тогда и только тогда является нормальным делителем группы G, когда в группе G существует подгруппа порядка qs, где $\left(s, \frac{m}{s}\right) = 1$, содержащая нормальный делитель H порядка s, пересечение которой с каждой подгруппой, ей сопряженной, либо совпадает с ней, либо содержится в H. Если $o(M) = m$, $q = p^\alpha$ (где p — простое число) и силовская p-подгруппа G циклична, то множество M является нормальным делителем группы G.

С. Д. Берман

1151. Об одной проблеме строения групп конечного порядка. Пиккар (Un problème de structure des groupes d'ordre fini. Piccard Sophie), J. math. pures et appl., 1956, **35**, № 2, 141—160 (франц.)

Пусть G — конечная группа, $a_1, \ldots, a_m$ — минимальная система образующих группы G и $f_i(a_1, \ldots, a_m) = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ — соответствующие определяющие соотношения. Группа G называется обладающей свойством $P \pmod n$, где $n \geqslant 2$, если степень каждого многочлена f_i относительно некоторой фиксированной подсистемы $a_{l_1}, \ldots, a_{l_t}$ системы $a_1, \ldots, a_m$ делится на n. В предыдущих работах автора (см., например, РЖМат, 1956, 7132) был рассмотрен случай, когда число n простое, а подсистема $a_{l_1}, \ldots, a_{l_t}$ совпадает со всей системой образующих. Доказанные в настоящей работе теоремы в основном являются распространением на общий случай результатов, полученных ранее для этого частного случая.

В. К. Туркин

1152. О порядке конечной разрешимой группы, являющейся суммой ее подгрупп Силова. Цакер (Sull'ordine di un gruppo finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow. Zacher Giovanni), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 2, 171—174 (итал.)

Доказывается, что конечная разрешимая группа, являющаяся теоретико-множественным объединением своих подгрупп Силова, имеет порядок вида $p^\alpha q^\beta$, где p, q — различные или совпадающие простые числа. Если группа G порядка $p^\alpha q^\beta$, где $p > q$, являющаяся объединением своих подгрупп Силова, содержит минимальный нормальный делитель порядка p^γ (где $\gamma > 0$), то подгруппа Силова S_p порядка p^α является нормальным делителем группы G; то же верно и в случае $p < q$, если только это последняя подгруппа S_p абелева.

Кроме того, доказано, что конечная группа, являющаяся суммой своих подгрупп Силова и обладающая инвариантной подгруппой Силова, разрешима.

В. К. Туркин

1153. О разложении симметрических групп по двойному циклическому модулю и о его приложении к теории ткацких переплетений. Сысоев А. Е., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 209—214

Текстильную ткань можно рассматривать как неограниченную совокупность двух взаимно перпендикулярных систем нитей: продольных и поперечных. Пересечение продольной и поперечной нити называется перекрытием. Между перекрытиями ткани и системой точек плоскости с целочисленными координатами существует взаимно однозначное соответствие. В зависимости от того, какая нить лежит сверху, различают продольные и поперечные перекрытия. Переплетения характеризуются множеством точек, соответствующих продольным перекрытиям. Предполагается, что продольные перекрытия расположены так, что существует наименьший квадрат периодов со сторонами $R_x = R_y = r$ (r называют раппортом переплетения). Кроме того, изучаются только так называемые главные переплетения, которые в квадрате периодов содержат только одно продольное перекрытие для каждого значения x и только одно поперечное перекрытие для каждого значения y.

Каждому главному переплетению можно поставить в соответствие подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \end{pmatrix}$, где числа в верхней строке являются номерами горизонтальных нитей в пределах раппорта, а числа в нижней строке

номерами соответствующих вертикальных нитей, несущих узлы переплетения. Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами симметрической группы S_r и главными переплетениями с раппортом r. Переплетения считаются эквивалентными, если существует параллельный перенос, хотя бы одна из горизонтальных или вертикальных компонент которого не кратна r, переводящий одно переплетение в другое. Пусть G — циклическая подгруппа группы S_r, порожденная циклом $(1, 2, \ldots, r)$. Доказано, что разложение группы S_r на классы по двойному циклическому модулю G соответствует разбиению главных переплетений с раппортом r на классы эквивалентных между собой переплетений.

Даются числовые характеристики переплетений, связанные с изучением разложения группы S_r на классы по двойному модулю G. С. Д. Берман

1154. П-факторизации конечных групп. Чунихин С. А., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 3, 397—399

Пусть П — непустое множество простых чисел. Если число n не делится ни на одно число из П, то n называется П-простым, в противном случае — П-составным. Числа k и e называются П-взаимно простыми, если их наибольший общий делитель (k, e) является П-простым числом. Пусть M — конечное множество целых положительных чисел, среди которых могут быть и равные, и пусть $M = M_0 \cup N$, где M_0 — подмножество множества M, состоящее из П-простых чисел, а N — подмножество, состоящее из П-составных чисел. Пусть $n_1, n_2 \in N$. Если из чисел, принадлежащих N, можно составить такую конечную последовательность, что первым ее числом будет n_1, а последним n_2, и каждые два соседних числа которой не П-взаимно просты, то число n_1 называется П-связанным с числом n_2 в множестве N. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — классы, на которые множество N распадается относительно отношения П-связанности. Произведение всех чисел класса M_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ называется П-блоком. В случае, когда M является множеством всех индексов композиционного ряда некоторой группы Г, эти произведения называются П-композиционными блоками группы Г. Обобщая теорему 1 из своей предыдущей работы (РЖМат, 1956, 1063), автор доказывает, что если число h, являющееся произведением различных П-композиционных блоков группы Г, делит ее порядок, то группа Г обладает подгруппой порядка hc, где c — некоторое П-простое число. В том же направлении обобщается теорема 2 указанной работы.

Д. А. Супруненко

1155. О теореме Бера и Хигмана. Тобин (On a theorem of Baer and Higman. Tobin Seán), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 2, 263—270 (англ.)

Как доказал Хигман (Higman G., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1949, 45, 321—327) существует такая бесконечная последовательность целых чисел $A(0) = 1$, $A(1) = 3, \ldots, A(M), \ldots$ что если некоторая степень q простого числа p удовлетворяет для некоторого M неравенству $q - 1 > (p - 1)A(M)$, то существует конечная группа показателя q (т. е. удовлетворяющая тождественному соотношению $X^q = 1$), ряд коммутантов которой имеет длину $M + 2$, а класс нильпотентности M-го коммутанта превышает любое наперед заданное число. Оказывается, что это утверждение неверно, для $M = 0$, если $q = p$, и для $M = 1$, если $q = 4$.

Пусть G — произвольная группа показателя q с конечным числом образующих. Доказано, что если $q = 4$ и ряд Фраттини группы G имеет длину λ, то класс нильпотентности подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ заключен между $2^{\lambda-2}$ и $5^{\lambda-2}$. Если $q = p$ и ряд коммутантов группы G имеет длину d, то класс нильпотентности группы G заключен между 2^{d-1} и p^{d-1}.

Эти оценки не зависят от числа образующих группы G.

А. И. Кострикин

1156. Групповые кольца конечных групп. Молчанов А. М., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 1, 1921

Пусть G — произвольная конечная группа. Рассмотрим множество T функций $P(g)$, определенных на группе G, значениями которых являются диагональные матрицы некоторого порядка N, состоящие из нулей и единиц и удовлетворяющие следующим условиям: 1) если $g \neq h$, то $P(g)P(h) = 0$; 2) $\Sigma_g P(g) = E$. Оказывается, что относительно операции свертки функций множество T является группой, изоморфной прямому произведению N экземпляров групп G. Разобъем множество T на классы, объединив в один класс все функции, которые получаются друг из друга произвольной перестановкой диагональных элементов. Класс, содержащий функцию $P(g)$, характеризуется числовой функцией $p(g)$, определяемой формулой

$$p(g) = \frac{1}{N} \operatorname{Sp} P(g).$$

Утверждается, что в пределе (при $N \to \infty$) умножение классов, индуцируемое сверткой (это умножение неоднозначно), ассимптотически переходит в свертку элементов группового кольца группы G (над полем действительных чисел). Аналогично можно построить и операцию сложения в групповом кольце группы G. Таким образом групповое кольцо группы G получается в результате предельного перехода, исходя из некоторых конечных групп.

Отмечено, что аналогичным путем можно получить непрерывные группы как предел конечных. С. Д. Берман

1157. Прямые слагаемые периодических абелевых групп. Эрдейи (Abel-féle torziócsoportok direkt osszeadandói. Erdélyi Mária), Acta Univ. debrecen., 1955, **2**, 145—149 (венг.; рез. англ.)

Доказывается, что элемент a абелевой p-группы G тогда и только тогда содержится в конечном прямом слагаемом этой группы, когда все элменты циклической подгруппы, порожденной элементом a, имеют в G конечную высоту. Л. Я. Куликов

1158. К теории двойственности для проективных пределов абелевых групп. Лептин (Zur Dualitätstheorie projektiver Limites abelscher Gruppen. Leptin Horst). Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **1**, № 3—4, 264—268 (нем.)

Пусть G — прямая алгебраическая сумма дискретных групп G_α, где α пробегает все трансфинитные числа первых двух классов. Зададим в G топологию при помощи системы подгрупп $\sum_{\alpha \leqslant \mu} G_\alpha$. Оказывается, что получающаяся топологическая абелева группа G не удовлетворяет теореме двойственности Л. С. Понтрягина.

Н. Я. Виленкин

1159. Замечание об общем произведении двух бесконечных циклических групп. Кон (A remark on the general product of two infinite cyclic groups. Cohn P. M.), Arch. Math., 1956, **7**, № 2, 94—99 (англ.)

Группа G называется общим произведением своих подгрупп A и B, если $G = AB$, $A \cap B = 1$. Редеи (Redei, L. Acta math. Hung., 1950, **1**, 74—98) нашел все общие произведения двух бесконечных циклических групп, удовлетворяющие некоторому дополнительному условию. В статье показано, что это условие выполняется для любых общих произведений двух бесконечных

циклических групп. При доказательстве использован один результат Ито (РЖмат,1956, 4349). Л. М.Глускин

1160. Автоморфизмы структуры смежных систем подгрупп группы. Курцио (Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi d'un gruppo. Curzio Mario), Ricerche mat., 1955, **4**, 3—14 (итал.)

Пусть S_G — группа автоморфизмов структуры смежных классов (по всевозможным подгруппам) некоторой группы G. Доказано, что если группа G конечна, то группа S_G тогда и только тогда изоморфна симметрической группе, S_m, где m — порядок группы G, когда либо группа G — циклическая группа простого порядка, или прямое произведение двух групп второго порядка. Для любого элемента $x \in G$ обозначим через E_x подгруппу всех автоморфизмов из S_G, оставляющих неподвижным элемент x. Если $x = 1$, то вместо E_x будем писать E_G. Доказано, что подгруппа E_x тогда и только тогда инвариантна в S_G, когда $E_x = 1$. Имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами группы G и смежными классами группы S_G по подгруппе E_x. Группа S_G содержит такую подгруппу $\overline{G}$, изоморфную группе G, что $E_x \cap \overline{G} = 1$, $E_x \cup \overline{G} = S_G$ для любого $x \in G$.

Доказан также следующий результат: Пусть G — конечная специальная группа; $A_1, A_2, \ldots, A_t$ — ее подгруппы Силова; a_i — произвольный элемент группы A_i; ω — произвольный элемент группы E_G и α_i — соответствующий ему элемент группы E_{A_i}. Тогда $\omega(a_1 a_2 \ldots a_t) = \Pi_{i=1}^{t} \alpha_i(a_i)$. В. К. Туркин

1161. О бесконечных простых группах подстановок. Хигман (On infinite simple permutation groups. Higman Graham), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 221—226 (англ.)

Пусть G — группа подстановок бесконечного множества E. Подмножество $D(\alpha) \subset E$ называется областью нестабильности элемента $\alpha \in G$, если $x\alpha \neq x$ для любого $x \in D(\alpha)$. Подмножество $X \subset E$ называется вполне нестабильным относительно $\alpha \in G$, если пересечение $X \cap X\alpha$ пусто. Доказано, что если для любых трех элементов α, β, $\gamma \neq 1$ группы G существует такой элемент ρ, что множество $\{D(\alpha) \cup D(\beta)\}\rho$ вполне нестабильно относительно γ, то коммутант группы G является простой группой. Отсюда легко вытекает, что простая группа бесконечной мощности a, обладающая подгруппой бесконечного индекса b, существует тогда и только тогда, когда $b \leq a \leq 2^b$. Для любого бесконечного кардинального числа a существуют простые группы мощности a, все собственные подгруппы которых имеют индекс a. А. И. Кострикин

1162. К теории обобщенных p-групп. Селе, Кертес (Az általánositott p-csoportok elméletehez. Szele Tibor, Kertész Andor), Acta Univ. debrecen., 1955, **2**, 131—135 (венг.; рез. англ.)

Пусть p — простое число и Z_p — кольцо целых p-адических чисел. Как доказал референт (Тр.Моск. матем. об-ва., 1952, **1**, 254), любой Z_p-модуль без кручения, не содержащий элементов бесконечной высоты и имеющий счетную систему образующих, разлагается в прямую сумму циклических Z_p-модулей. В работе дается простое доказательство этого утверждения. Кроме того, строится смешанный Z_p-модуль, не содержащий элементов бесконечной высоты и имеющий счетную систему образующих, периодическая часть которого не выделяется прямым слагаемым. Л. Я. Куликов

1163. Представления разрешимых групп. Берман С. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **2**. М.,АН СССР, 1956, 111

1164. Обобщение некоторых теорем для регулярных p-групп. Кемхадзе Ш. (ზოგიერთი თეორემის განზოგადება რეგულარულ P-ჯგუფისათვის. ქემხაძე შ.), Батумский педагогический институт, Тр.Батумск.гос.пед. ин-та, 1956, 5, 185—187 (груз; рез. рус.)

1165. Некоторые свойства свободных нильпотентных групп. Гольдина Н. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 112—113

1166. О квазиоператорных группах. Сесекин Н. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 114

1167. Составные расширения групп. III. Тейлор (Compound group extensions. III. Taylor Robert L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 490—520 (англ.)

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 628). Продолжение $\varphi : E \to G$ нормального гомоморфизма $\varphi : K \to G$ естественным образом порождает гомоморфизм $\theta : G \to A_X(K)/\gamma(K)$, а последний в свою очередь порождает гомоморфизм $\tau : Q \to A_X(K)/I(K)$, где $I(K)$ — группа внутренних автоморфизмов группы K.

Описываются продолжения $\bar{\varphi}$ и гомоморфизмы θ, индуцирующие наперед заданный гомоморфизм τ. Устанавливаются, в частности, условия существования отображений $\bar{\varphi}$ и θ (для данного гомоморфизма τ). З. И. Боревич

1168. Сдвиг в группах и теорема о главных идеалах. Витт (Verlagerung von Gruppen und Hauptidealsatz. Witt E.), Proc. Intern. Congr. Math., 1954, 2, 1954, 71—73 (нем.)

Пусть $G = \Sigma A_{r_j}$ — разложение некоторой группы по подгруппе A конечного индекса. Для любого элемента $x \in G$ и любого j произведение $r_j x$ имеет вид a_j, r_j, где $a_j \in A$. Как известно, соответствие $x \to \Pi a_j$ определяет некоторый гомоморфизм $V : G/[G, G] \to A/[A, A]$ (сдвиг). Дается новое определение этого гомоморфизма, использующее групповое кольцо $\mathfrak{G}$ группы G.

Рассмотрим отображение $\delta : G \to \mathfrak{G}$, определенное формулой $\delta x = 1 - x$, $x \in G$. Оказывается, что индуцированные отображением δ гомоморфизмы $G/[G, G] \to \delta G \pmod{\delta G \delta G}$ и $A/[A, A] \to \delta A \pmod{\delta A \delta G}$ являются изоморфизмами. Доказано, что в силу этих изоморфизмов сдвигу V соответствует отображение $\delta G \pmod{\delta G \delta G} \to \delta A \pmod{\delta A \delta G}$, определяемое формулой

$$\delta x \pmod{\delta G \delta G} \to \Sigma r_j \delta x \pmod{\delta A \delta G}.$$

Таким образом, эту формулу можно принять за определение гомоморфизма V.

Пользуясь этим определением, автор дает очень короткое доказательство теоремы о том, что если группа G имеет конечное число образующих, а $A = [G, G]$, то $V = 1$ (это утверждение равносильно теореме о главных идеалах теории полей классов).

1169. Группы, покрываемые конечным числом смежных классов. Неймann (Groups covered by finitely many cosets. Neumann B. H.), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 227—242 (англ.)

Представление группы G в виде теоретико-множественного объединения некоторых смежных классов C_i называется покрытием группы G. Покрытие называется неприводимым, если в любом смежном классе существует элемент, не принадлежащий другим классам.

Пусть $\{C_i\}$ — произвольное неприводимое покрытие группы G, состоящее из n классов, и пусть $C_i = A g_i$, где $g_i \in G$, а A — подгруппа группы G. Обозначим

через α_i индекс подгруппы A_i, а через δ_n — индекс подгруппы $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Доказано, что $\alpha_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} i^{2i-2}$, $\delta_n \leqslant \prod_{i=1}^{n} i^{2i-1}$. Доказаны также другие оценки того же типа, как, например, следующая: $\delta_n \leqslant u_n^2$, где $u_1 = 1$, $u_{i+1} = u_i^2 + u_i$. Аналогичные оценки получены и для покрытий подгруппами.

Кроме того, доказаны следующие утверждения: 1) коммутант группы конечен, если группу можно покрыть конечной системой подгрупп с конечными коммутантами; 2) группа G тогда и только тогда покрывается конечным числом циклических подгрупп, когда G — конечная или циклическая группа.

Примечание референта. Работа тесно примыкает к исследованиям П. Г. Конторовича, в которых рассматриваются вопросы, связанные с покрытием групп подгруппами. Однако об этом автор не упоминает. Б. И. Плоткин

1170. Непрерывные представления вещественных форм комплексных унимодулярных ортогональных и симплектических групп. Крафт (Die stetigen Darstellungen der reellen Formen der komplexen unimodularen, orthogonalen und symplektischen Gruppen. Krafft Günther), Mitt. math. Semin. Giessen, 1955, № 53, 53 S.) (нем.)

Изучаются непрерывные представления вещественных форм классических простых групп Ли. В § 1 пересчитываются вещественные формы унимодулярной, ортогональной и симплектической групп. В § 2 приводятся основные положения теории представлений классических простых групп. В § 3 устанавливается связь между непрерывными представлениями компоненты единицы вещественной формы и аналитическими представлениями компоненты единицы соответствующей комплексной группы. В § 4 определяется число компонентов каждой вещественной формы. В § 5, примыкающем к известной теореме А. Клиффорда, доказывается следующее утверждение. Пусть H — подгруппа индекса 2 группы Γ, $\vartheta(\Gamma)$ — представление группы Γ и $\vartheta(H)$ — представление подгруппы H, содержащееся в представлении $\vartheta(\Gamma)$. Тогда если представление $\vartheta(H)$ вполне приводимо, то и представление $\vartheta(\Gamma)$ вполне приводимо. В этом же параграфе строятся расширения представления нормального делителя индекса 2 до представлений всей группы. В § 6 строятся накрывающие группы ортогональной группы. В § 7, с помощью результатов §§ 5 и 6, представления компоненты единицы вещественной формы расширяются до представлений всей группы. В § 8 в основном излагается теория спинорных представлений Г. Вейля и Р. Брауэра. В § 9 исследуется эквивалентность комплексно сопряженных представлений вещественных форм. Д. А. Супруненко

1171. Об импримитивных группах трехмерного комплексного пространства. Ким Сен Ен, Морозов В. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, № 14, 69—85

Классифицируются импримитивные группы преобразований трехмерного комплексного пространства, не сводящиеся к группам на плоскости. Все полупростые группы этого вида являются группами одного из следующих типов: A_1, A_2, $A_1 \times A_1$, $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_1 \times A_1$. С помощью присоединенного представления полупростой подгруппы в алгебре Ли радикала исследуется, к каким из этих групп, а также к каким из полупростых групп на плоскости, можно так присоединить радикал, чтобы полученная группа не сводилась к группе на плоскости. В результате получается полная классификация неразрешимых групп. Из разрешимых групп авторам удается перечислить все интранзитивные группы и некоторые транзитивные. Результаты оформлены в виде таблиц, содержащих операторы Ли исследованных групп. А. Л. Онищик

1172. Топология групп Ли. Дынкин Е. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 53

1173. О некоторых свойствах полугруппы, инвариантной в группе. Кацман А. Д., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 179—183

См. РЖМат, 1955, 5630; 1956, 5121. Пусть S — инвариантная подполугруппа группы без кручения G. Говорят, что подполугруппа $A \subset S$ обладает периодическим индексом в S, если для любого $x \in S$ существует такое n, что $x^n \in S$. Множество A всех элементов из S, порождающих в S главные идеалы периодического индекса, является инвариантной подполугруппой полугруппы S, а дополнение $S \setminus A$ — инвариантным простым идеалом. Рассмотрены некоторые свойства чистой полугруппы S, все главные идеалы которой обладают периодическими индексами. Л. М. Глускин

1174. Некоторые типы элементов полугруппы, инвариантной в группе. Конторович П. Г., Кацман А. Д., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 145—150

См. РЖМат, 1955, 5630; 1956, 5121. Пусть $\mathfrak{S}$ — чистая инвариантная подполугруппа группы без кручения G, содержащая единицу. Элемент $a \in \mathfrak{S}$ называется изолированным, если главный идеал $\mathfrak{S}a$ полугруппы $\mathfrak{S}$ изолирован; неразложимым, если из $a = uv$, $u \in \mathfrak{S}$, $v \in \mathfrak{S}$ следует, что либо $u = 1$, либо $v = 1$; простым, если идеал $\mathfrak{S}$ a простой. Любой простой элемент является одновременно изолированным и неразложимым.

Множество всех простых элементов полугруппы $\mathfrak{S}$ порождает в ней коммутативную полугруппу, инвариантную в G. Всякая максимальная подполугруппа $R \subset \mathfrak{S}$ имеет вид $R = \mathfrak{S}/a$, где a — неразложимый элемент. Пусть полугруппа $\mathfrak{S}$ обладает базисом в смысле Л. М. Рыбакова (Матем. сб., 1939, 5 (47), 521—536), т. е. обладает системой образующих, состоящей из неразложимых элементов. Каждый элемент полугруппы $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда единственным образом (с точностью до порядка) выражается через элементы базиса, когда каждый неразложимый элемент прост. Доказан и ряд других предложений; в частности, об I-классах полугруппы $\mathfrak{S}$, т. е. множествах ее элементов, изоляторы главных идеалов которых совпадают. Л. М. Глускин

1175. Об арифметическом строении одного класса коммутативных полугрупп. Соннеборн (On the arithmetic structure of a class of commutative semi-groups. Sonneborn Lee M.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 4, 783—790 (англ.)

Элементы a, b полугруппы S называются ассоциированными, если a делит b и b делит a. Рассматривается коммутативная полугруппа S с сокращением, удовлетворяющая следующим условиям: 1) любая возрастающая или убывающая цепь неассоциированных делителей произвольного элемента a обрывается на конечном месте; 2) $ab = cd$, тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $x, y, z, w \in S$, что $a = xy$, $b = zw$, $c = xz$ и $d = yw$. Из условия 2) следует, что отношение ассоциированности является отношением эквивалентности. Доказано, что после отождествления ассоциированных элементов полугруппа S будет подпрямым произведением дистрибутивной структуры и гауссовой полугруппы. Ким Кё Сек

1176. О матричных представлениях ассоциативных систем. Понизовский И. С., Матем. сб., 1956, **38**, № 2, 241—260

Рассматриваются представления конечной полугруппы S матрицами над произвольным полем P. Вопрос о том, когда любое представление вполне приводимо,

сводится к случаю, когда полугруппа не имеет нетривиальных идеалов. Такая полугруппа, как известно, характеризуется некоторой матрицей R, элементы которой принадлежат некоторой группе $\mathfrak{G}$. Доказано, что каждое представление над P такой полугруппы тогда и только тогда вполне приводимо, когда соответствующая матрица R является квадратной матрицей, порядок группы $\mathfrak{G}$ не делится на характеристику поля P и для матрицы R существует обратная матрица (с элементами из группового кольца группы $\mathfrak{G}$). При помощи этого критерия показано, что все представления любой полугруппы частичных преобразований над полем характеристики p вполне приводимы. Приведены также и другие приложения этого критерия.

В случае, когда поле P алгебраически замкнутое (это ограничение сам автор характеризует как несущественное), строятся все неприводимые представления любой полугруппы, каждое представление которой над полем P вполне приводимо.

В примечании к работе указывается, что уже после сдачи работы в печать появилась статья Мунна (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1,1—15), содержащая многие из полученных автором результатов.

Е. С. Ляпин

1177. К теории идеалов ассоциативных систем. Воробьев Н. Н., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1955, **103**, 31—73

Совокупность всех элементов полугруппы G с одним и тем же главным левым идеалом называется левоидеальной компонентой. Аналогично определяются правоидеальные и двустороннеидеальные компоненты. Пусть T_1 и T_2 — такие левые идеалы полугруппы G, что $T_1 \supset T_2$. Если включение $T_1 \supset T' \supset T_2$, где T—левый идеал полугруппы G, возможно лишь тогда, когда $T' = T_1$ или $T' = T_2$, то $T_1 \setminus T_2$ является левоидеальной компонентой. Обратно, любая левоидеальная компонента имеет такой же вид. Аналогичное утверждение имеет место для правоидеальных и двустороннеидеальных компонент.

Пусть $K = T_1 \setminus T_2$ — произвольная двустороннеидеальная компонента. Доказано, что если для некоторой левоидеальной компоненты K', содержащейся в K, множество $T_2 \cup K'$ является левым идеалом, то для любой левоидеальной компоненты $K'' \subset K$ множество $T_2 \cup K''$ также будет левым идеалом.

Далее рассматриваются различные свойства левоидеальных и двустороннеидеальных компонент L-систем, т. е. полугрупп, удовлетворяющих условиям минимальности для главных левых идеалов. Для полугруппы M_n всех квадратных матриц порядка n над некоторым полем выясняются идеалы и компоненты.

Подполугруппа T' полугруппы G называется левой достижимой, если существуют такие подполугруппы $G = T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_k = T'$, что подполугруппа T_i является левым идеалом подполугруппы T_{i-1}. Рассматриваются различные свойства левых достижимых полугрупп. В частности, изучаются LD-системы, т. е. полугруппы, удовлетворяющие условию минимальности для левых достижимых полугрупп. В LD-системе пересечение произвольного непустого множества левых достижимых полугрупп само является левой достижимой полугруппой.

Для L-систем выводятся различные свойства так называемых левых увеличительных элементов, т. е. таких элементов g, для которых существует такое подмножество $N \subset G$, $N \neq G$, что $gN = G$. При их помощи осуществляется некоторое специальное представление LD-систем в виде объединения подмножеств.

Е. С. Ляпин

1178. Об одном классе полугрупп. Шенкман (A certain class of semigroups. Schenkman Eugene), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 4, 242—243 (англ.)

Доказано, что если в полугруппе с сокращением S для любых элементов a, $b \in S$ разрешимо уравнение $ab = xba$, то существуют такие группы C_* и G^*, что $G_* \subset S \subset G^*$ и факторгруппа G^*/G_* абелева.

Л. М. Глускин

1179. Вложение в полугруппы с односторонним делением. Кон (Embeddings in semigroups with one-sided division. Cohn P. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 169—181 (англ.)

Доказано, что полугруппа S, содержащая идемпотент e, тогда и только тогда может быть погружена в полугруппу с левым делением, когда 1) для любых элементов $x, y, u, v \in S$ из $ux = uy$ следует, что $vx = vy$; 2) подполугруппа eS может быть погружена в группу; 3) для любых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ из $ea_0 = ea_n$ и $a_{i-1}S \cap a_iS \neq \phi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ следует, что $a_0 = a_n$.

Если полугруппа S не содержит идемпотентных элементов, то для ее вложимости в полугруппу с левым делением (которую также можно выбрать без идемпотентных элементов) необходимо и достаточно выполнение условия 1).

Любая полугруппа с левым сокращением, не содержащая идемпотентных элементов, может быть погружена в полугруппу с левым делением и левым сокращением, отличную от группы.

Л. М. Глускин

1180. Вложение в полугруппы с полуторным делением. Кон (Embeddings in sesquilateral division semigroups. Cohn P. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 181—191 (англ.)

Говорят, что полугруппа S удовлетворяет условию SDl, если для любых a, $b \in S (a \neq b)$ существует такой элемент $z \in S$, что либо $a = bz$, либо $b = az$. Если полугруппа с левым делением удовлетворяет условию SDl, то она называется полугруппой с полуторным делением. Полугруппа с полуторным делением, содержащая идемпотент, является группой. Полугруппа S, удовлетворяющая условию SDl и не содержащая идемпотентных элементов, тогда и только тогда может быть погружена в полугруппу с полуторным делением (которую можно выбрать также не содержащей идемпотентных элементов), когда S является полугруппой с левым сокращением.

Л. М. Глускин

1181. Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований. Ляпин Е. С., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1955, **103**, 5—29

Подробное изложение результатов автора, опубликованных ранее (РЖМат, 1953, 115).

Л. М. Глускин

1182. К теории полугрупп. II. Исэки (Contribution to the theory of semi-groups. II. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 4, 225—227 (англ.)

Результаты Шварца (РЖМат, 1956, 5122), касающиеся коммутативных хаусдорфовых бикомпактных полугрупп, распространены на топологические гомогруппы (РЖМат, 1953, 117).

Л. М. Глускин

1183. О компактных полугруппах. Исэки (On compact semi-groups. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 4, 221—224 (англ.)

Доказано, что бикомпактная полугруппа S тогда и только тогда является гомогруппой (РЖМат, 1953, 117), когда для любых a, $b \in S$ каждое из пересечений $aS \cap bS$ и $Sa \cap Sb$ не пусто.

Пусть S — бикомпактная полугруппа, в которой для любых элементов a, $b \in S$ существуют такие натуральные числа r, s, t, что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$ (РЖМат, 1956, 1102). Доказано, что тогда каждое множество K_e (РЖМат, 1956, 1103) является максимальной одно-

идемпотентной подполугруппой, а полугруппа S является суммой непересекающихся подполугрупп K_e.
Л. М. Глускин

1184. О комплексах в полугруппе. Кемперман (On complexes in a semigroup. Kemperman J. H.B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 2, 247—254; Indagationes math., 1956, 18, № 2, 247—254 (англ.)

Пусть G — полугруппа с сокращением, A, B — ее конечные подмножества и $k=[A]+[B]-[AB]$, где $[D]$ — число элементов множества D. Доказано, что если $k\geqslant 2$, то каждый потенциально обратимый элемент подмножества AB (РЖМат, 1956, 7905) допускает не менее чем k различных представлений в виде $c=ab$, где $a\in A$, $b\in B$. Если элемент $c_0=a_0b_0$ ($a_0\in A$, $b_0\in B$) обладает обратным в G, то G содержит такую конечную подгруппу H порядка $\geqslant k$, что $a_0Hb_0\subset AB$. Доказаны также некоторые предложения о числе различных представлений элементов $c\in AB$ в виде $c=ab$ ($a\in A$, $b\in B$) в случае, когда полугруппа G является группой. Л. М. Глускин

1185. Представление упорядоченных полугрупп. Вагнер В. В., Матем. сб., 1956, 38, № 2, 203—240

Представлением некоторой полугруппы G при помощи частичных преобразований множества A называется произвольный гомоморфизм P полугруппы G в полугруппу F всех частичных преобразований множества A. В работе дается общий метод нахождения представлений произвольной полугруппы при помощи частичных преобразований. Эти представления строятся при помощи представлений полугруппы правыми сдвигами. Оказывается, что нахождение представлений при помощи частичных преобразований в известном смысле сводится к нахождению представлений при помощи полных преобразований.

Так как полугруппа F естественным образом упорядочена, то всякое представление P полугруппы G определяет в G отношение квазипорядка (рефлексивное и транзитивное бинарное отношение). Как результат изучения этих отношений получено, в частности, условие того, что стабильное (т. е. сохраняющееся при умножении на любой элемент) отношение квазипорядка реализовалось бы некоторым представлением.

Общая теория иллюстрируется на полугруппах, порождаемых одним элементом. Оказывается, что бесконечные полугруппы такого типа не могут обладать нетривиальным отношением порядка, реализуемым некоторым представлением. |E. С. Ляпин

1186. Развитие ассоциативной алгебры и алгебраическая теория чисел. III. Вандивер, Уивер (A development of associative algebra and an algebraic theory of numbers. III. Vandiver H. S., Weaver M. W.), Math. Mag., 1956, 29, № 3, 135—151 (англ.)

Рассматриваются некоторые первоначальные понятия теории несобственных (не взаимно однозначных) конечных подстановок в связи с теорией полугрупп. (I ч. см. Math. Mag., 1952, 25, 233—250; II ч. см. РЖМат, 1955, 3615). Е. С. Ляпин

1187. Обобщение теоремы Уоллеса о полугруппах. Миянага (A generalisation of Wallace theorem on semi-groups. Miyanaga Yasue), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 4, 254 (англ.)

Доказано, что гомогруппа содержит нулевой элемент (РЖМат, 1953, 117), если каждый ее элемент идемпотентен. Л. М. Глускин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1188. Гильбертово поле классов мнимых квадратичных числовых полей. Эйхлер (Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers. Eichler Martin), Math. Z., 1956, 64, № 3, 229—242 (нем.)

Пусть

$$F_n(x, x')=\Pi\left(x-j\left(\frac{r_1\tau'+r_2}{r_3}\right)\right),$$

где r_1, r_2, r_3 — такие целые числа, что $r_1>0$, $r_3>0$, $r_1r_3=n$, $0\leqslant r_2\leqslant r_3$, $x'=j(\tau')$, где $j(\tau)$ — функция, инвариантная относительно модулярной группы (т. е. являющаяся абсолютным инвариантом), регулярная на верхней полуплоскости, однозначная в фундаментальной области модулярной группы и разлагающаяся в ряд Фурье

$$j(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty}c_ne^{2\pi in\tau},\quad c_{-1}=1,$$

с рациональными коэффициентами c_n, знаменатели которых содержат конечное число рациональных простых делителей. Пусть далее $g(x)$ — наибольший общий делитель всех многочленов $F_n(x, x)$, получающихся, когда n пробегает нормы целых элементов мнимого квадратичного поля $k=k_0(\sqrt{d})$, где k_0 — поле рациональных чисел и $d<0$. Тогда, как известно, композит K_1 поля разложения многочлена $g(x)$ и поля k является полем классов над k. В работе дается новое доказательство этого утверждения. Б. М. Уразбаев

1189. Исправление к моей работе о гильбертовом поле классов мнимых квадратичных числовых полей. Эйхлер (Berichtigung zu meiner Arbeit über den Hilbertschen Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers. Eichler Martin), Math. Z., 1956, 65, № 2, 214 (нем.)

1190. Заметка об одном результате Крулля. Грейветт (Note on a result of Krull. Gravett K. A. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 379 (англ.)

Элементарно доказывается следующая теорема Крулля (Krull W., J. reine und angew. Math., 1932, 167, 160—196): Пусть K — нормированное поле с нормой v, принимающей значения в группе Γ, и R — поле классов вычетов нормы v. Тогда $|K|\leqslant|R|^{|\Gamma|}$, где через $|S|$ обозначается мощность множества S.
Б. М. Уразбаев

1191. Расщепление оценок в расширениях локальных областей целостности. Абхьянкар, Зарисский (Splitting of valuations in extensions of local domains. Abhyankar Shreeram, Zariski Oscar), Proc. Mat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, 41, № 2, 84—90 (англ.)

Пусть R — локальная область целостности с максимальным идеалом M, K — ее поле отношений, v — некоторая оценка, определенная в поле K, R_v — кольцо оценки v и M_v — максимальный идеал кольца R_v. Идеал M называется центром оценки v, если $R\subseteq R_v$ и $M=R\cap M_v$.

Основная теорема: Если локальная область целостности R равнохарактеристична, регулярна и ее размерность больше единицы, то для любого конечного сепарабельного расширения K^* поля K существует бесконечное множество действительных дискретных оценок v поля K, имеющих идеал M своим центром и допускающих более чем одно расширение на поле K^*.

Опираясь на эту основную теорему, авторы доказывают некоторое утверждение, являющееся частным случаем одной из теорем Нагата (РЖМат, 1954, 3257).

Пусть далее $\overline{R}$ — пополнение локальной области целостности R, $\overline{M}$ — ее максимальный идеал и $\overline{K}$ — ее поле отношений. Любая оценка поля $\overline{K}$ с центром $\overline{M}$ естественным образом индуцирует некоторую оценку

поля K с центром M. Доказано, что две оценки поля K с центром M тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны индуцированные ими оценки поля K (оценки v_1 и v_2 поля K называются эквивалентными, если существует такое изоморфное отображение τ группы Γ_1 значений оценки v_1 на группу Γ_2 значений оценки v_2, что $v_2(x) = \tau v_1(x)$ для любого элемента $x \in K$). Е. Г. Шульгейфер

1192. Расщепление оценок в расширениях локальных областей целостности. II. Абхьянкар (Splitting of valuations in extensions of local domain. II. Abhyankar Shreeram). Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955, **41**, № 4, 220 — 223 (англ.)

Уточняется основная теорема предыдущей работы (реф. 1191). Оказывается, что указанные в этой теореме оценки поля K допускают точно $[K^*:K]$ различных расширений. Эта теорема справедлива и для локальных областей целостности, обладающих ядром (определение см. в книге Самюэля (РЖМат, 1955, 2141)). Е. Г. Шульгейфер

1193. Об однородных идеалах нетеровых градуированных колец. Йосида (On homogeneous ideals of graded Noetherian rings. Yoshida Michio), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 1, 43—49 (англ.)

Рассматривается нетерово I-градуированное кольцо A, где I — линейно упорядоченная абелева полугруппа с сокращением с нулевым элементом (определение градуированного кольца см., например, в работе Дедеккера (РЖМат, 1956, 8677)). Идеал a кольца A называется однородным, если a вместе с некоторым элементом a содержит все однородные составляющие элемента a. Доказывается, что все простые идеалы, соответствующие однородному идеалу a, однородны, что в качестве примарных компонент в неприводимом представлении однородного идеала a в пересечение примарных идеалов можно выбрать однородные примарные идеалы и что композиционный ряд от простого идеала $\mathfrak{p}$ до произвольного, принадлежащего к $\mathfrak{p}$ однородного примарного идеала $\mathfrak{q}$ можно составить исключительно из однородных примарных идеалов. Аналогичные результаты, при несколько иных предположениях, получены Норткоттом (РЖМат, 1956, 5129).

I-градуированное кольцо A называется специальным I-градуированным кольцом, если для любого элемента α упорядоченной полугруппы I и любого достаточно большого элемента $\beta \in I$ существует такой элемент $\nu \in \Gamma$, что $\beta = \alpha + \nu$. Однородный идеал I-градуированного кольца $A = \Sigma_{\alpha \in I} A_\alpha$ называется допустимым, если он не содержит ни одной из однородных составляющих A_α кольца A. Доказывается, что если допустимый однородный простой идеал $\mathfrak{p}$ специального I-градуированного нетерова кольца A имеет ранг r, то убывающую цепочку из $r+1$ простых идеалов, начинающуюся от $\mathfrak{p}$, можно составить исключительно из однородных простых идеалов.

В конце работы доказывается следующая лемма: Для любой убывающей цепочки $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_{r-1} \supset \mathfrak{p}_r$ простых идеалов нетерова кольца R и любого элемента a идеала $\mathfrak{p}$ существует такая убывающая цепочка простых идеалов $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1^* \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_{r-1}^* \supset \mathfrak{p}_r$, что $a \in \mathfrak{p}_{r-1}^*$. Опираясь на эту лемму, автор упрощает индуктивную часть доказательства теоремы о ранге изолированного простого идеала, соответствующего некоторому идеалу, порожденному m элементами. Е. Г. Шульгейфер

1194. Понятие кольца разложения. Шевалле (La notion d'anneau de décomposition. Chevalley C.), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 21—33 (франц.)

Пусть $\mathfrak{J}$ — область целостности с единицей, $\mathfrak{o}$ — подкольцо кольца $\mathfrak{J}$, содержащее единицу, $\mathfrak{m}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{M}$ — такой простой идеал кольца $\mathfrak{J}$, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$. Идеал $\mathfrak{M}$ называется неразветвляемым относительно кольца $\mathfrak{o}$, если максимальный идеал локального кольца $\mathfrak{J}_{\mathfrak{M}}$ порождается идеалом $\mathfrak{m}$ (локальным кольцом автор называет коммутативное кольцо с единицей, обладающее лишь одним максимальным идеалом). Идеал $\mathfrak{M}$ называется контрольным относительно кольца $\mathfrak{o}$, если он неразветвляем относительно $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{J} = \mathfrak{M} + \mathfrak{o}$. Подкольцо $\mathfrak{h}$ кольца $\mathfrak{J}$ называется кольцом разложения идеала $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{o}$, если идеал $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}$ является контрольным идеалом относительно $\mathfrak{o}$ и кольцо $\mathfrak{h}$ является наибольшим подкольцом кольца $\mathfrak{J}$, обладающим этим свойством. Доказывается существование кольца разложения идеала $\mathfrak{M}$ области целостности $\mathfrak{J}$ относительно ее подкольца $\mathfrak{o}$.

Предположим, что кольцо $\mathfrak{o}$ является нетеровой локальной областью целостности, идеал $\mathfrak{m}$ — максимальным идеалом кольца $\mathfrak{o}$, а кольцо $\mathfrak{J}$ состоит из элементов, целых относительно $\mathfrak{o}$. В этом случае, если кольцо $\mathfrak{J}$ само является кольцом разложения идеала $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{o}$, то пересечение всех степеней максимального идеала $\mathfrak{m}\mathfrak{J}_{\mathfrak{M}}$ локального кольца $\mathfrak{J}_{\mathfrak{M}}$ совпадает с нулевым идеалом и кольцо $\mathfrak{o}$ плотно в кольце $\mathfrak{J}_{\mathfrak{M}}$ в топологии, полную систему окрестностей которой составляют степени максимального идеала $\mathfrak{m}\mathfrak{J}_{\mathfrak{M}}$. Пусть далее K и L — поля частных соответственно колец $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{J}$, L' — нормальное алгебраическое расширение поля K, содержащее поле L, $\mathfrak{J}'$ — целозамыкание кольца $\mathfrak{J}$ в поле L' и $\mathfrak{M}'$ — такой идеал кольца $\mathfrak{J}'$, что $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{M}$. Тогда кольцо разложения $\mathfrak{h}$ идеала $\mathfrak{M}$ относительно кольца $\mathfrak{o}$ содержится в подкольце $\mathfrak{h}'$ кольца $\mathfrak{J}'$, состоящем из всех элементов кольца $\mathfrak{J}'$, остающихся неподвижными при каждом автоморфизме из группы Галуа поля L' над полем K, переводящем идеал $\mathfrak{M}'$ в себя. Если кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{J}$ целозамкнуты в своих полях частных K и L и поле L сепарабельно над полем K, то для любого нормального сепарабельного расширения L' поля K, содержащего поле L, имеет место равенство $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. Отсюда следует, что, если, кроме того, поле L нормально над полем K, то понятие кольца разложения совпадает с понятием кольца разложения в смысле Нагата (РЖМат, 1954, 3257).

В добавлении к работе передоказывается известная теорема о том, что целозамыкание одномерной нетеровой локальной области целостности в ее поле частных нетерово. Е. Г. Шульгейфер

1195. Теория n-коциклов и групп n-когомологий в коммутативных кольцах. Кинохара (Theory of n-cocycles and n-cohomology groups in commutative rings. Kinohara Akira), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 1, 31—41 (англ.)

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, R_0 — подкольцо кольца R и M — произвольный унитарный R-модуль. Функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M$, $\alpha_i \in R$, не меняющаяся при любой перестановке аргументов и аддитивная по каждому аргументу, называется относительной n-коцепью, если $f(a, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ и $f(a\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = af(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для любого $a \in R_0$. На группе относительных n-коцепей обычным образом определяется кограничный оператор δ.

Соответствующая группа $Z^n(R, R_0; M)$ относительных n-коциклов изучается в случае, когда кольцо R имеет конечный степенной базис относительно подкольца R_0.

Пусть D — дифферента конечного расширения K/k

поля p-адических чисел k, O и o — кольца целых элементов полей K и k соответственно, а P — простой идеал кольца O. Доказывается, что группы $Z^{2m+1}(O, o; O/P^r)$ и $H^{2m}(O, o; O/P^r)$ изоморфны фактор-группе $O/(P^r, D)$, $r \geqslant 1$, (где $(P^r D)$ — общий наибольший делитель идеалов P^r и D). З. И. Боревич

1196. О минимальных центральных тождествах. Левицкий (On minimal central identities. Levitzki J) Riveon lemat., 1954, 8, 41 — 58 (иврит; рез. англ.)

Пусть A — алгебра над полем F. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ от неперестановочных переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля F называется центральным, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ элемент $f(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит центру алгебры A. Центральный многочлен наименьшей степени называется минимальным центральным многочленом. В заметке определяются все минимальные центральные многочлены полной матричной алгебры F_n. Из резюме автора

1197. Общая теория систем линейных уравнений над полупростыми кольцами. Кертес (The general theory of linear equation systems over semi-simple rings. Kertész A.), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 79—86 (англ.)

Система (вообще говоря, бесконечная) линейных уравнений над некоторым кольцом R называется совместной, если каждая тождественно равная нулю линейная комбинация левых частей уравнений (коэффициенты которой являются либо элементами кольца R, либо целыми рациональными числами) остается равной нулю и после замены в ней левых частей уравнений свободными членами. Основной результат: кольцо R тогда и только тогда полупросто (в классическом смысле), когда любая совместная система линейных уравнений над кольцом R обладает в R решением. С. Н. Черников

1198. Разложения полупростых колец. Голди. (Decompositions of semi-simple rings. Goldie A. W.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 1, 40—48 (англ.)

Непустое множество примитивных идеалов $\{P_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ полупростого в смысле Джекобсона кольца R называется минимальным множеством разложения, если $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, но $\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} P_\alpha \neq 0$ для любого подмножества $\Lambda_1 \subset \Lambda$. Минимальное множество разложения существует тогда и только тогда, когда в кольце R существует примитивный идеал с ненулевым аннулятором. В этом случае минимальное множество разложения состоит из всех примитивных идеалов с ненулевыми аннуляторами. Любой ненулевой идеал, а также фактор-кольцо по его аннулятору, некоторого кольца, обладающего минимальным множеством разложения, также обладает минимальным множеством разложения. Пусть S — полная прямая сумма примитивных колец R_α, $\alpha \in \Lambda$, и P_α — ее примитивный идеал, состоящий из всех элементов, α-я координата которых равна нулю. Некоторая подпрямая сумма R примитивных колец R_α, $\alpha \in \Lambda$, обладает минимальным множеством разложения тогда и только тогда, когда $R \bigcap P_\alpha \neq 0$. Это минимальное множество состоит из пересечений $R \bigcap P_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$. В частности, всякое подкольцо кольца S, содержащее дискретную прямую сумму $\Sigma_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$, обладает минимальным множеством разложения. Если каждое фактор-кольцо R/P_α обладает минимальным идеалом, то любой идеал P_α является аннулятором некоторого минимального идеала кольца R.

Полупростое кольцо называется почти примитивным, если аннулятор любого его ненулевого идеала состоит только из нуля. Почти примитивное кольцо только тогда обладает минимальным множеством разложения, когда оно примитивно. Если $\{P_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ — такое множество примитивных идеалов полупростого кольца R, что $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = 0$, то кольцо R тогда и только тогда почти примитивно, когда для любого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = \varnothing$, либо $\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} P_\alpha = 0$, либо $\bigcap_{\alpha \in \Lambda_2} P_\alpha = 0$. Основной результат: любое полупростое кольцо с условием максимальности для идеалов изоморфно подпрямой сумме конечного числа почти примитивных колец. В. А. Андрунакиевич

1199. Ограниченные алгебры Ли и простые ассоциативные алгебры характеристики p. Хохшилд (Restricted Lie algebras and simple associative algebras of characteristic p. Hochschild G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 135—147 (англ.)

Продолжается исследование простых ассоциативных алгебр с чисто несепарабельными полями расщепления, начатые в предыдущей работе того же автора (РЖМат, 1956, 4374).

Большая часть работы посвящена изучению регулярных (в смысле автора) расширений простых ассоциативных алгебр над полями характеристики $p > 0$ посредством ограниченных алгебр Ли дифференцирований их центров относительно подполей, содержащих p-е степени всех центральных элементов. Полученные результаты используются для доказательства следующей теоремы:

Пусть F — произвольное поле характеристики $p > 0$ и C — такое его конечное алгебраическое расширение, что $C^{p^k} \subset F$ для некоторого натурального числа k. Тогда любая конечномерная ассоциативная простая алгебра над полем F с центром C изоморфна тензорному произведению поля C, рассматриваемого как алгебра над F, и простой ассоциативной алгебры, центр которой совпадает с полем F.

Дается также другое доказательство этой теоремы, основанное на следующем результате.

Пусть C — поле произвольной характеристики, A — простая конечномерная ассоциативная алгебра с центром C и B — ее полупростая подалгебра, содержащая поле C. Тогда любое дифференцирование подалгебры B в алгебру A, отображающее C в себя, продолжается до дифференцирования алгебры A.

Частный случай последнего результата был доказан ранее Джекобсоном (Jacobson N., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, 42, 206—224). В. М. Глушков

1200. О полупростых автоморфизмах алгебр Ли. Борель, Мостов (On semi-simple automorphisms of Lie algebras. Borel A., Mostow G. D.), Ann. Math., 1955, 61, № 3, 389—405 (англ.)

Рассматриваются вопросы существования неподвижных точек и инвариантных картановских подалгебр для автоморфизмов конечномерных алгебр Ли над полем без характеристики. Автоморфизм алгебры называется полупростым, если он, как линейное преобразование пространства алгебры, имеет лишь простые элементарные делители. Основными результатами работы являются следующие утверждения. Пусть Γ — некоторая группа полупростых автоморфизмов алгебры Ли G. Тогда: A) Если группа Γ циклическая, а алгебра G неразрешимая, то Γ оставляет неподвижным некоторый ненильпотентный элемент $x \in G$. Этот элемент регулярен, если алгебра G полупроста. B) Некоторая картановская подалгебра алгебры G инвариантна относительно группы Γ, если алгебра G и группа Γ разрешимы или если группа Γ обладает конечной цепочкой нормальных делителей $\Gamma = \Gamma_s \supset \Gamma_{s-1} \supset \ldots \supset \Gamma_0 = (e)$ с циклическими факторами. Утверждение A обобщает теорему, полученную ранее Борелем и Серром (РЖМат, 1954, 1576). Интерес к полупростым автоморфизмам объяс-

няется также тем, что любой автоморфизм полупростой алгебры Ли, оставляющий инвариантной картановскую подалгебру, является полупростым.

Используя один результат Ф. Р. Гантмахера (Матем. сб., 1939, 5, 101—144), авторы показывают, что полупростой автоморфизм полупростой алгебры Ли содержится в связной компоненте единицы группы всех автоморфизмов, оставляющих неподвижными элементы некоторой картановской подалгебры.

Уточняя результаты других авторов (А. И. Мальцева, К. Шевалле, Ивагори и Сатаке), авторы доказывают также сопряженность картановских подалгебр разрешимой алгебры Ли относительно некоторой группы автоморфизмов специального вида. А. И. Мальцев

1201. Об образующих нильпотентных линейных алгебр. Паттерсон (On the generators of nilpotent linear algebras. Patterson E. M.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 25, 17—23 (англ.)

Пусть A — некоторая алгебра, не обязательно ассоциативная. Положим $A^1 = A_1 = A^{(0)} = A$, $A^{i+1} = A^i A$, $A_{i+1} = AA_i$, $A^{(i+1)} = A^{(i)} A^{(i)}$. Оказывается, что если нильпотентная алгебра A ранга n, в которой множество $A^1, \ldots, A^r, A_1, \ldots, A_s$ (здесь перечислены все различные подалгебры указанного вида) упорядочено, обладает таким базисом $e_1, \ldots, e_n$, что $e_1, \ldots, e_m$ является базисом алгебры $A^{(1)}$, то A порождается элементами $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Из этой основной теоремы, в частности, следует: 1) если квадрат любого элемента алгебры A ранга n равен нулю, то $\dim A^{(1)} \leqslant n-2$; 2) если $\bar{L}$ — разрешимая алгебра Ли над полем характеристики 0 ранга n, минимальное число линейно независимых образующих которой равно m, а $\dim L^{(1)} = p$ и $\dim L^{(2)} = q$, то $q \leqslant n - m \leqslant p$; 3) если A — ассоциативная нильпотентная алгебра, причем $\dim A = n$, а $\dim A^{(1)} = n-1$, то A изоморфна алгебре матриц (a_{ij}), для которых a_{ij} зависит только от $j-i$, причем $a_{ij} = 0$, если $i \geqslant j$.

Л. А. Скорняков

1202. Теория показателей неассоциативной алгебры. Этерингтон (Theory of indices for non-associative algebra. Etherington I. M. H.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1954—1955, A64, № 2, 150—160 (англ.)

Показателями называются формальные неассоциативные суммы единиц, т. е. выражения вида 1, $1+1$, $(1+1)+1$, $1+(1+1)$, $(1+1)+(1+1)$, $1+(1+(1+1))$ и т. д. Для сокращения формул показатели вида $((\cdots(1+1)+1)+\cdots)+1$, содержащие n единиц, обозначаются через n. Так, например, $(1+1)+1=3$, $1+(1+1)=1+2$ и т. д. Кроме естественного (формального) сложения, для показателей определяется ассоциативное умножение. Это умножение однозначно характеризуется следующими двумя условиями: 1) оно дистрибутивно справа; 2) символ 1 является единицей.

Пусть x — произвольный элемент некоторой мультипликативной системы (алгебры, по терминологии автора). Тогда для любого показателя A определен элемент x^A. Например, $x^2 = xx$, $x^{1+2} = xx^2$, $x^{2+2} = x^2 x^2$ и т. д. Очевидно, что $x^A x^B = x^{A+B}$ и $(x^A)^B = x^{AB}$.

Пусть S — подмножество некоторой мультипликативной системы (или более общо, теоретико-множественного объединения нескольких мультипликативных систем). Говорят, что показатели A и B равны на S, если $x^A = x^B$ для любого элемента $x \in S$. Множество $\log S$ классов равных на S показателей называется логарифметикой множества S. Операция сложения показателей индуцирует некоторую операцию сложения на любой логарифметике. Соответствующее утверждение для операции умножения, вообще говоря, не верно. Можно лишь утверждать, что из $A = C$ следует, что $AB = CB$.

Совокупность $\bar{S}$ всех степеней элементов множества S называется его замыканием, а соответствующая логарифметика $\log \bar{S}$ — замыканием логарифметики $\log S$. Если $\log \bar{S} = \log S$, то логарифметика называется замкнутой. Для замкнутых логарифметик из $A = C$ следует, что $BA = BC$ (это свойство характеризует замкнутые логарифметики). Следовательно, на замкнутых (и только на замкнутых) логарифметиках определено умножение.

Если в некоторой логарифметике имеет место тождественное соотношение $(A+B)+(C+D) = (A+C)+(B+D)$, то имеет место также и соотношение $AB = BA$ и поэтому такая логарифметика будет замкнута.

Рассматривая операцию сложения в логарифметике $\log S$ как некоторое «умножение», мы можем построить ее логарифметику $\log \log S$. Оказывается, что $\log \log S = \log \bar{S}$. Отсюда следует, что некоторая логарифметика L тогда и только тогда замкнута, когда $\log L = L$.

М. М. Постников

1203. Двойственное себе ядро условий Биркгофа в структурах с конечными цепями. Вильгельм, Вацлав, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 439—450 (рез. англ.)

Структура S называется циклической, если она является теоретико-множественным объединением двух своих цепей R_b^a и S_b^a между некоторыми элементами $a, b \in S$, $a \geqslant b$, причем эти цепи не должны иметь общих элементов, кроме элементов a и b. Подструктура $\bar{S}$ структуры S называется насыщенной, если каждая цепь R_b^a, насыщенная в $\bar{S}$, насыщена и в S.

Рассматривается нижнее условие Биркгофа: если элемент a структуры S покрывает элементы b, $c \in S$, $b \neq c$, то элемент $d = b \wedge c$ покрывается элементами b и c; а также двойственное ему верхнее условие Биркгофа. Доказывается, что в структурах с конечными цепями нижнее условие Биркгофа равносильно следующим двум условиям: 1) в структуре S не существует насыщенной циклической подструктуры длины $\geqslant 3$; 2) в структуре S не существует насыщенной подструктуры, состоящей из семи элементов $a_0, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d$, в которой $a_0 < b_1$, $a_0 < b_2$, $b_1 < c_1$, $b_1 < c_2$, $b_2 < c_2$, $b_2 < c_3$, $c_1 < d$, $c_2 < d$, $c_3 < d$.

Условие 1 двойственно самому себе и содержится поэтому и в верхнем условии Биркгофа. Структура S тогда и только тогда является дедекиндовой, когда она не содержит циклической подструктуры длины $\geqslant 3$. Будем говорить, что две насыщенные цепи R_b^a и S_b^a структуры S образуют σ-(соответственно π-) пару, если для любых двух элементов c и d, $c \in R_b^a$, $d \in S_b^a$, $b < c < a$, $b < d < a$ имеет место равенство $c \vee d = a$ (соответственно $c \wedge d = b$). Структура S с конечными цепями тогда и только тогда удовлетворяет нижнему (верхнему) условию Биркгофа, когда в S не существует π- (σ-) пары насыщенных цепей, из которых хоть одна имеет длину $\geqslant 3$. Будем говорить, что в структуре S выполняется теорема Жордана — Гёльдера с подобием простых частных, если длины любых двух насыщенных цепей $a = a_0 > a_1 > \cdots > a_n = b$ и $a = b_0 > b_1 > \cdots > b_m = b$ совпадают и существует такая подстановка φ чисел $1, 2, \ldots, (n-1)$, что простое (т. е. состоящее из двух элементов) частное a_k / a_{k+1} подобно простому частному $b_{\varphi(k)} / b_{\varphi(k)+1}$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. В структуре S с конечными цепями теорема Жордана — Гёльдера с подобием простых частных выполняется тогда

и только тогда, когда эта теорема выполняется в любых двух насыщенных цепях $\overline{R}_b^a$ и $\overline{S}_b^a$, образующих в структуре S циклическую подструктуру длины $\geqslant 3$. Два частных a/b и c/d называются π-подобными, если существует такая конечная последовательность простых частных $a/b = a_0/b_0$, a_1/b_1, ..., $a_r/b_r = c/d$, что каждая пара соседних частных прямо подобна. В структуре S с конечными цепями теорема Жордана — Гёльдера с π-подобием простых частных выполняется тогда и только тогда, когда для любых двух насыщенных цепей R_b^a и S_b^a структуры S, образующих циклическую подструктуру длины $\geqslant 3$, существует такая конечная последовательность насыщенных цепей $R_b^a = {}^0R_b^a, {}^1R_b^a, \ldots, {}^kR_b^a = S_b^a$, что никакие две соседние цепи не образуют циклическую подструктуру. А. Х. Лившиц

1204. **Прямые разложения единицы в модулярных структурах. Якубик Ян,** Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 399—411 (рез. англ.)

Доказано, что если на универсальной алгебре A существуют такие отношения конгруэнтности R_i, что $\Pi R_i = 0$, то алгебра A изоморфна подпрямому произведению алгебр A_i, где A_i — фактор-алгебра алгебры A по отношению конгруэнтности R_i.

Основные результаты относятся к полной дедекиндовой структуре S с нулем и единицей. Доказано, что: 1. Прямые разложения единицы структуры S

$$1 = \bigcup_{\alpha \in M} a_\alpha \text{ (I)} \quad \text{и} \quad 1 = \bigcup_{\beta \in N} b_\beta \text{ (II)}$$

тогда и только тогда обладают общим продолжением, когда полная подструктура структуры S, порожденная всеми элементами a_α, b_β, дистрибутивна. 2. Разложения (I) и (II) тогда и только тогда обладают общим продолжением, когда $1\bar{\varphi}_\alpha \theta_\beta \varphi_\alpha = 0$ для любых $\alpha \in M$, $\beta \in N$. 3. Если разложения (I) и (II) обладают общим продолжением, то существует полная вполне дистрибутивная подструктура S_1 структуры S, содержащая все элементы a_α, e_β ($\alpha \in M$, $\beta \in N$). 4. В структуре S тогда и только тогда существует прямое разложение $1 = \bigcup_{k \in L} C_k$, являющееся продолжением всех прямых разложений единицы, когда вполне дистрибутивна полная подструктура структуры S, порожденная множеством всех элементов структуры S, обладающих дополнениями. А. Х. Лившиц

1205. **Доказательство предположения о конечных модулярных структурах. Дилуэрт** (Proof of a conjecture on finite modular lattices. Dilworth R. P.), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 359—364 (англ.)

Доказывается, что в конечной дедекиндовой структуре множество элементов, покрываемых в точности k элементами и множество элементов, покрывающих в точности k элементов, равномощны (для любого k). Доказательство использует свойства функции Вейснера—Мёбиуса. Из этой теоремы следует, в частности, что в конечной дедекиндовой структуре число элементов, не разложимых в пересечения, равно числу элементов, не разложимых в объединения. А. Х. Лившиц

1206. **Обобщение теоремы Биркгофа относительно максимальных цепей некоторых структур. Сас** (Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices. Szász G.), Acta scient. math., 1955, 16, № 1—2, 89—91 (англ.)

Цепь C структуры L называется максимальной, если она не является собственной подцепью некоторой цепи структуры L. Как известно, утверждение, что все максимальные цепи между элементами a и b структуры L имеют одинаковую длину, в случае структур конечной длины связано с условиями полумодулярности. Доказывается, что в общем случае это утверждение не зависит не только от условия полумодулярности, но даже и от условия дистрибутивности. А. Х. Лившиц

1207. **Прямые разложения вполне дистрибутивных структур. Якубик Ян,** Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 489—491 (рез. англ.)

Доказаны следующие две теоремы:

1. Каждую вполне дистрибутивную полную структуру можно разложить в прямое произведение неразложимых множителей. В частности, любая полная вполне дистрибутивная булева алгебра атомарна.

2. Полная структура тогда и только тогда является прямым произведением всех своих неразложимых прямых множителей, когда ее центр является вполне дистрибутивной полной структурой. А. Х. Лившиц

1208. **Замечание о топологических структурах. Микулик** (Poznámka k topologickým svazům. Mikulík Miloslav), Práce Brněnské základ. českosl. akad. věd., 1955, 27, № 7, 368—372 (чеш.; рез. русс., нем.)

Структурой с метрикой называется структура S, в которой введена метрика ρ, обладающая следующими свойствами: 1. $\rho(x, y) = \rho(x \wedge y, x \wedge y)$ для любых элементов x, $y \in S$. 2. Если $x < y < z$, то $\rho(x, y) < \rho(x, z)$ и $\rho(y, z) < \rho(x, z)$. 3. Из каждой ограниченной неубывающей или невозрастающей (относительно структурного упорядочения) последовательности элементов структуры S можно выделить сходящуюся относительно метрики ρ подпоследовательность. Свойствами 1 и 2 обладает любая метрическая структура. Свойством 3 метрическая структура обладает тогда, когда она метрически полна. Структуры с метрикой, в отличие от метрических структур, могут быть и не дедекиндовыми. В структуре с метрикой из $x_n \to x$, $y_n \to y$ следует, что $x_n \vee y_n \to x \vee y$ и $x_n \wedge y_n \to x \wedge y$. Любая полная структура с метрикой является топологической структурой в ее топологии упорядоченности.

А. Х. Лившиц

1209. **Об одной проблеме теории отношений нормальности Оре. Бенадо** (Asupra unei probleme din teoria relațiilor de normalitate ale lui O. Oré. Benado Mihail), Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 9, 1241—1243 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается, что нормальность β (первого рода) (в смысле О. Оре) обладает следующим свойством: для любых четырех элементов a, u, x и y произвольной структуры S, удовлетворяющих условиям: $uN_\beta a$, $xN_\beta y$, $x \leqslant u$, где N_β — отношение β-нормальности, выполняется соотношение $(a \vee x) N_\beta (a \vee y)$. Строится пример, показывающий, что уплотнения Цассенхауза двух β-нормальных цепей с общими концами могут не быть β-нормальными цепями. А. Х. Лившиц

1210. **Теоретико-структурная теорема о неподвижной точке и ее приложения. Тарский** (A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Tarski Alfred), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 285—309 (англ.)

Доказано, что множество неподвижных точек монотонного отображения полной структуры в себя непусто и является полной структурой. Доказан также следующий более общий результат: множество общих неподвижных точек любого семейства коммутативных друг с другом монотонных отображений полной структуры в себя непусто и является полной структурой. Эти результаты применяются к теории упорядоченных множеств, действительных функций (например, доказано обобщение теоремы Вейерштрасса о промежуточном значении), булевых алгебр, теоретико-множественных эквивалентностей и топологических пространств (напри-

мер, доказано обобщение теоремы Кантора-Бендиксона).
Ю. И. Соркин

1211. Характеристика полных структур. Дейвис (A characterization of complete lattices. Davis Anne C.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 311—319 (англ.)

Как показал Тарский (реф. 1210) любое монотонное отображение полной структуры в себя имеет неподвижные точки. В работе доказано, что это необходимое условие полноты структуры является также и достаточным. Кроме того, доказано еще следующее необходимое и достаточное условие полноты структуры: Структура $\mathfrak{A}$ мощности $\aleph_\alpha$ тогда и только тогда полна, когда 1) любое отображение f структуры $\mathfrak{A}$ в себя, для которого $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$, где $x, y \in \mathfrak{A}$, имеет неподвижные точки, 2) для любого множества $X \subset \mathfrak{A}$ мощности $\aleph_\delta$, где $\delta < \alpha$, существует $\bigcup X$.

Кроме того, дана еще одна аналогичная характеристика полных структур.
Ю. И. Соркин

1212. Свободные булевы кольца и алгебры. Стоун (Free Boolean rings and algebras. Stone M. H.), An. Acad. brasileira cienc., 1954, 26, №1, 9—17 (англ.)

Замечается, что известное определение групповой алгебры A некоторой группы M над полем Ф (как множества всех функций $M \to \Phi$ с конечным носителем и со сверткой в качестве умножения) дословно переносится на случай, когда M является обобщенной мультипликативной системой, т. е. множеством с конечнозначным умножением, а Ф — произвольным (даже неассоциативным) кольцом. Специально рассматривается случай, когда M — множество всех конечных подмножеств некоторого фиксированного множества P, являющееся мультипликативной системой относительно операции объединения, а Ф — поле вычетов по модулю 2. Оказывается, что в этом случае алгебра A является свободной булевой алгеброй, порожденной множеством P.
Ю. И. Соркин

1213. Поляритеты и прямые разложения групп. Шик (Die Anwendung der Polarität auf die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. Šik František), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 1, 61—75 (нем.; рез. русс.)

Пусть G—непустое частично упорядоченное множество с наименьшим элементом e и симметричным антирефлексивным бинарным отношением дизъюнктности δ, обладающим следующими свойствами: а) из $x \geqslant y$, $x \delta y$ следует, что $e \geqslant y$; б) $e \delta e$; в) из $x \delta y$, $z \leqslant x$ следует, что $z \delta y$; г) если $x \delta y$, то существует такой элемент $z \neq e$, что $z \leqslant x$, $z \leqslant y$. Любому подмножеству X множества G ставится в соответствие полярное подмножество X', состоящее из всех таких элементов $x' \in G$, что $x \delta x'$ для всех $x \in X$. Множество Y, для которого существует такое множество $X \subset G$, что $Y = X'$, называется компонентой множества G. Система всех компонент множества G образует полную булеву алгебру; частичная упорядоченность в ней задается теоретико-множественным включением; произведение любого множества компонент совпадает с их пересечением, а сумма определяется как наименьшая компонента, содержащая их объединение. Обратно, каждую полную булеву алгебру можно представить в виде множества всех компонент некоторого множества.

Полученные результаты применяются к циклическим группам и доказывается теорема, из которой непосредственно следует, что циклическую группу, порядок которой является произведением попарно взаимно простых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$, можно единственным образом разложить в прямую сумму подгрупп порядков $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Из этих же результатов следует, что группа G тогда и только тогда обладает однозначным прямым разложением, когда прямые множители группы G образуют булеву алгебру по отношению к теоретико-множественному включению, пересечению и произведению.

Для групп с условием минимальности для нормальных делителей доказывается теорема, аналогичная теореме Ремака — Шмидта, а также дается достаточное условие для однозначности ремакова разложения.
А. Х. Лившиц

1214. Теоремы о продолжении и единственности для разложений алгебраических систем с условием регулярности. Хьюз (Refinement and uniqueness theorems for the decompositions of algebraic systems with a regularity condition. Hughes N. J. S.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 259—273 (англ.)

В весьма общей ситуации рассматривается вопрос о существовании общего продолжения двух прямых разложений. Общие теоремы применяются к исследованию прямых разложений групп, колец и частично упорядоченных множеств. В частности, решается 11-я проблема Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во ин. лит., 1952).

1215. О строении алгебраических систем. Фудзивара (On the structure of algebraic systems. Fujiwara Tsuyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 74—79 (англ.)

Рассматривается абстрактная алгебра A, удовлетворяющая условиям

I. Все композиции бинарны, однозначны и выполнимы для каждой пары элементов.

I′. Алгебра A обладает нулевым элементом e ($eae = e$ для каждой композиции a.

Подмножество C алгебры A называется классом смежности, если для каждого многочлена $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и любых элементов $x_2, \ldots, x_n \in A$ из $f(C, x_2, \ldots, x_n) \cap C \neq \emptyset$ следует $f(C, x_2, \ldots, x_n) \subset C$. Класс смежности C называется нормальной подалгеброй, если C образует подалгебру алгебры A. Каждый класс смежности является классом эквивалентных элементов некоторого отношения конгруэнтности и обратно. Класс смежности, соответствующий отношению эквивалентности θ и содержащий элемент x, обозначается через $S_x(\theta)$. Если $x = e$, то вместо $S_x(\theta)$ пишется $S(\theta)$.

Наименьшее отношение конгруэнтности, соответствующее нормальной подалгебре N, называется нижним отношением конгруэнтности. Объединение двух нижних отношений конгруэнтности также является нижним отношением конгруэнтности.

Отношение конгруэнтности θ на любой подалгебре B индуцирует некоторое отношение $\theta(B)$. Система классов вычетов по этому отношению обозначается через θ / B.

Пусть θ, φ — нижние отношения конгруэнтности на алгебре A и θ_L, φ_M — нижние отношения конгруэнтности на некоторых нормальных подалгебрах L и M, содержащихся в нормальных целях алгебры A. Рассматриваются алгебры, удовлетворяющие при любых θ, φ, L, M, θ_L и φ_M одному из следующих условий:

II. $(S(\theta) / \varphi) = (S(\varphi) / \theta)$.

II*. $(S(\theta_L (L \cap M)) / \varphi_M (L \cap M)) = (S(\varphi_M (L \cap M) / / \theta_L (L \cap M))$.

III. $(S(\theta) / \varphi) = (S_x(\varphi) / \theta)$ для любого элемента x, удовлетворяющего условию $S(\theta) \cap S_x(\varphi) \neq \emptyset$.

S III. $(S_x(\theta) / \varphi) = (S_y(\varphi) / \theta)$ для любых x и y, удовлетворяющих условию $S_x(\theta) \cap S_y(\varphi) \neq \phi$.

S III*. $(S_x(\theta \times (B)) / \varphi(B) = (S_y(\varphi(B)) / \theta(B))$ для любых x и y, удовлетворяющих условию $S_x(\theta(B)) \cap \cap S_y(\varphi \cdot (B)) \neq \phi$, где B — любая подалгебра алгебры A.

Устанавливаются следующие связи между этими условиями:

$$S\,III^{\bullet} \to S\,III \to III \to II \quad \text{и} \quad S\,III^{\bullet} \to II^{\bullet} \to II.$$

Через $B \parallel N$ обозначается система классов вычетов алгебры B по наибольшему отношению конгруэнтности, соответствующему нормальной подалгебре N. Доказывается теорема Шрейера для нормальных цепей: Если алгебра A удовлетворяет условию II^{*}, то каждые две нормальные цепи $A=A_0 \supset S(\theta_0(A_0))=A_1 \supset \cdots \supset S(\theta_{n-1} \times \times(A_{n-1}))=A_n=e$, $A=B_0 \supset S(\varphi_0(B_0))=B_1 \supset \cdots \supset S \times \times(\varphi_{m-1}(B_{m-1}))=B_m=e$, могут быть уплотнены членами $A_{i,j}=(A_i \cap B_j / \theta_i(A_i))$ и $B_{i,j}=(A_i \cap B_j / \varphi_j(B_j))$, где $\theta_i(A_i)$ и $\varphi_j(B_j)$ — нижние отношения конгруэнтности на A_i и B_j соответственно, причем системы классов вычетов $A_{i,j} \parallel A_{i,j+1}$ и $B_{i,j} \parallel B_{i+1,j}$ изоморфны.

Для абстрактных алгебр, удовлетворяющих условию III, устанавливается связь между прямыми объединениями и прямыми произведениями. Доказывается теорема Шмидта для прямых объединений и вытекающая из нее теорема для прямых произведений: пусть $A \cong A_1 \times \cdots \times \times A_n \cong B_1 \times \cdots \times B_m$ — два разложения в прямое произведение с неразложимыми множителями алгебры A. Если в A из $S(\theta)=e$ следует $\theta=0$ и нормальные цепи алгебры A конечны, то $m=n$ и A_i и B_j попарно изоморфны. А. Х. Лившиц

1216. Об отношениях конгруэнтности на абстрактных алгебрах. Якубик Ян, Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 4, 314—317 (рез. англ.)

Построена алгебра (в смысле Биркгофа) с одной бинарной операцией, содержащая одноэлементную подалгебру S и обладающая двумя различными отношениями конгруэнтности, для которых классы эквивалентности, содержащие единственный элемент подалгебры S, совпадают. Тем самым отрицательно решается 33-я проблема Биркгофа (Биркгоф. Г., Теория структур, Изд-во ин. лит., 1952, стр. 134). Несколько ранее эта же проблема была решена иным способом А. И. Мальцевым (РЖМат, 1957, 209), что и отмечается автором в примечании при корректуре. Ю. И. Соркин

1217. Строение множества топологий с заданными созвездиями точек. Шик (Struktura množiny topologií s předepsanými souhvězdími bodů. Šik František), Spisy vyd. přírodověd. fakult. Masarykovy univ., 1955, № 9, 459—472 (чеш.; рез. русс., нем.)

Топологией на множестве P называется отображение u системы всех подмножеств M множества P в себя. Окрестностью множества M называется множество O, для которого пересечение $M \cap u(P \setminus O)$ пусто. Через $O_u(M)$ обозначается система всех окрестностей множества M в топологии u. Пересечение всех окрестностей множества M называется созвездием этого множества и обозначается через M^s. Пусть каждой точке $x \in P$ отнесена некоторая система множеств $\bar{O}(x)$. Тогда существует точно одна топология u, для которой $\bar{O}(x)=O_u(x)$; в этой топологии $x \in uM$ тогда и только тогда, когда $P \setminus M \in \bar{O}(x)$. Пусть далее u и v — две топологии на множестве P. Топология u называется более слабой, чем топология v (обозначение: $u \leqslant v$), если $uM \subset vM$ для любого подмножества M. Оказывается, что $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда $O_v(x) \subset O_u(x)$ для всех точек $x \in P$. Топология u называется M-топологией, если из $M_1 \subset M_2$ вытекает, что $uM_1 \subset uM_2$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{P}$ всех топологий u на множестве P с заданными созвездиями точек. Множество $\mathfrak{P}$ всегда непусто и содержит наименьший элемент. Наибольший элемент в $\mathfrak{P}$ имеется лишь тогда, когда ни одна точка множества P не имеет созвездия, получающегося удалением из P более чем двух точек. Доказывается, что множество $\mathfrak{M}$ всех M-топологий системы $\mathfrak{P}$ является вполне дистрибутивной структурой, наименьший элемент которой совпадает с наименьшим элементом в $\mathfrak{P}$, а множество $\mathfrak{N}$ всех топологий $u \in \mathfrak{P}$, для которых $v_0 \leqslant u \leqslant w_0$, где v_0 и w_0 — наименьший и наибольший элементы из $\mathfrak{M}$, является вполне дистрибутивной, а значит, и атомной, булевой алгеброй, имеющей $\mathfrak{M}$ своей подструктурой. Структура $\mathfrak{M}$ является булевой алгеброй лишь тогда, когда $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$. Для изучения структуры $\mathfrak{M}$ строятся две трансфинитных последовательности структур и показывается, что структура $\mathfrak{M}$ изоморфна подструктуре кардинального произведения этих структур. Определение мощностей сомножителей этого кардинального произведения позволяет установить мощности множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, если они бесконечны. М. Ф. Бокштейн

1218. Несколько замечаний о топологиях с заданными созвездиями точек. Шик (Několik poznámek o topologiích s předepsanými souhvězdími bodů. Šik František), Spisy vyd. přírodověd. fakult. Masarykovy univ., 1955, № 9, 473—480 (чеш.; рез. русс., нем.)

Продолжение предыдущей работы (реф. 1217). Топология u на множестве P называется O-топологией, если замыкание пустого множества пусто, I-топологией, если $M \subset uM$, A-топологией, если $u(M \cup N)=uM \cup uN$, A^{*}-топологией, если $u \bigcup_\alpha M_\alpha = \bigcup_\alpha uM_\alpha$, и, наконец, B-топологией, если $u(x)=(x)$. Множество всех точек $x \in P$, для которых $O_u(x)$ не пусто, обозначается через P'.

Показывается, что топология u тогда и только тогда является M-топологией (реф. 1217), когда любое множество, содержащее некоторую окрестность произвольной точки, само является окрестностью этой точки. Топология u тогда и только тогда является I-топологией, когда любая точка множества P' содержится в своем созвездии. M-топология u тогда и только тогда является 1) A-топологией, когда из $x \in P'$; $O, O' \in O_u(x)$ вытекает, что $O \cap O' \in O_u(x)$; 2) A^{*}-топологией, когда из $x \in P'$, $\{O_\alpha\} \subset O_u(x)$ вытекает, что $\bigcap_\alpha O_\alpha \in O_u(x)$; 3) O-топологией, когда $P'=P$; 4) B-топологией, когда $x^s=(x)$ для всех точек $x \in P$. Показывается, что наименьший элемент множества $\mathfrak{P}$ (реф. 1217) является M- и A^{*}-топологией, и находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы эта топология была O-, I- или B-топологией. Выводится также ряд условий существования в множестве $\mathfrak{P}$ наибольшего элемента. М. Ф. Бокштейн

1219 К. Теория идеалов. Нортткотт (Ideal theory. Northcott D. G.), Cambridge, Univ. Press., 1953, 11 pp., 2.50 doll.) (англ.)

Излагаются некоторые из основных понятий и отдельные результаты из теории коммутативных колец и, в частности, аддитивной теории идеалов и теории локальных колец, которые, по мнению автора, находят наибольшее применение в других разделах математики, и особенно в алгебраической геометрии. Книга не требует от читателя специальных алгебраических знаний; поэтому в ней приведены подробные доказательства почти всех утверждений. Конкретные приложения к алгебраической геометрии не излагаются.

В гл. I «Примарные разложения» приводятся основные определения и простейшие результаты теории идеалов, изучаются вопросы, связанные с разложением идеала в пересечение конечного числа примарных идеалов, вводится понятие об нётеровых кольцах; глава

заканчивается теоремой Гильберта о базисе и примерами.

В гл. II «Фактор-кольца и кольца отношений» строится кольцо отношений R_s кольца R по любому мультипликативно замкнутому множеству S (даже содержащему делители нуля). Устанавливается соответствие между простыми (примарными) идеалами кольца R_s и простыми (примарными) идеалами кольца R; в конце главы вводится определение локального кольца.

В гл. III «Некоторые фундаментальные свойства нётеровых колец» доказывается существование композиционного ряда, состоящего из примарных идеалов, начинающегося с данного простого идеала $\mathfrak{P}$ и оканчивающегося произвольным, принадлежащим к $\mathfrak{P}$, примарным идеалом $\mathfrak{q}$ (длина этого ряда, определяемая однозначно, называется длиной примарного идеала $\mathfrak{q}$), а также вводятся понятия о ранге и размерности идеала.

В гл. IV «Алгебраическая теория локальных колец» вводятся основные понятия теории локальных колец (как, например, понятие системы параметров локального кольца и понятие регулярного локального кольца) и описывается структура одномерного регулярного локального кольца. В конце главы приводятся определения и простейшие свойства порядка $\operatorname{ord}_{\mathfrak{P}} b$ элемента b, не являющегося делителем нуля, относительно произвольного допустимого простого идеала $\mathfrak{P}$ (т. е. простого идеала ранга один, содержащего неделитель нуля) нетерового кольца R, целозамкнутого в своем кольце частных.

В гл. V «Аналитическая теория локальных колец» доказывается существование и единственность пополнения произвольного локального кольца в его естественной топологии и указываются некоторые свойства локального кольца, которые остаются справедливыми и для его пополнения.

После гл. V помещены «Замечания» к каждой из пяти глав, в которых дается краткая характеристика развития основной темы данной главы с указанием, а в иных случаях и с кратким описанием содержания некоторых работ отдельных авторов, внесших существенный вклад в развитие данной темы. Библиография, далеко не полная, как отмечает и сам автор, включает 19 названий.

Е. Г. Шульгейфер

1220 Д. Явные формулы для групп норм в обобщенной локальной теории полей классов. Крамптон (Explicit formulas for norm groups in generalized local class field theory. Crampton Theodore Henry Miller.— Doct. diss. Indiana Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 8, 1405—1406 (англ.)

Краткий перечень результатов из докторской диссертации автора. Рассматриваются абелевы расширения K/k регулярного локального поля k в обобщенной локальной теории полей классов (РЖМат, 1955, 3644; 1956, 2010), которые обычным способом приводятся к чисто разветвленным циклическим расширениям, степени которых либо взаимно просты с характеристикой p поля k, либо имеют вид p^r. Пользуясь понятиями и результатами обобщенной локальной теории полей классов и теорией расширения Куммера, автор выясняет строение этих расширений и указывает явные выражения для их групп норм.

Б. М. Уразбаев

1221 Д. Неассоциативные свободные суммы алгебр с объединенной подалгеброй. Дидидзе Ц. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. МГУ, М., 1956

См. также: 1227, 1230, 1241, 1251, 1254, 1258 К, 1369, 1387, 1604, 1694, 1695 К, 1716—1719, 1722—1731 Д, 1743, 1759, 1762, 1770, 1775, 1776, 1780—1784, 1791 К, 1798, 1800—1802, 1890

ТОПОЛОГИЯ

1222. n-мерный куб и башня Ханоя. Кроу (The n-dimensional cube and the tower Hanoi. Crowe D. W.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 1, 29—30 (англ.)

Игра «башня Ханоя» состоит в следующем: на один из трех вертикальных стержней насажено n проколотых дисков так, что каждый, находящийся выше, меньше любого из нижних дисков. Задача — в наименьшее число «ходов» перенести все диски на один из двух других стержней; по определению «ход» есть перенесение верхнего диска с одного из стержней на другой, причем больший диск никогда не должен помещаться выше меньшего. В заметке устанавливается связь между последовательностью ходов, решающих эту задачу, и гамильтоновым циклом на n-мерном кубе (простой замкнутый полигон, составленный из вершин и ребер куба, проходящий через каждую вершину куба точно один раз).

В. А. Ефремович

1223. Вполне несвязные совершенные декартовы множества. Данжуа (Les ensembles par faits cartésiens totalement discontinus. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 18, 2195—2198 (франц.)

Приводится доказательство следующей теоремы: всякое вполне несвязное совершенное множество P (евклидова) пространства U_r, $r \geqslant 2$, расположено на простой жордановой дуге.

А. С. Пархоменко

1224. Разбиение замкнутой неориентируемой поверхности на минимальное число треугольников. Рингель (Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann. Ringel Gerhard), Math. Ann., 1955, **130**, № 4, 317—326 (нем.)

Найдено наименьшее число δ_q треугольников для триангуляции замкнутой неориентируемой поверхности рода q:

$$\delta_2 = 16, \quad \delta_3 = 20,$$

$$\delta_q = 2\left[\sqrt{6q} + \frac{5}{2}\right] + 2q \qquad \text{при } q > 3.$$

В. А. Залгаллер

1225. Теорема о дисках. Харрольд (A theorem on disks. Harrold O. G., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 153—154 (англ.)

Доказывается теорема: Если существует гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, переводящее простую замкнутую линию J в линию J^1, так что для некоторой пары точек a, b линии J^1 одна из двух дуг линии J, определенных точками a и b, полуспрямляема, то существует просто вложенный диск D, обладающий следующими свойствами: 1) D и J встречаются в единственной точке, внутренней для D, 2) граница D сцеплена с J.

Здесь диск—замкнутая топологическая двумерная клетка. Диск называется просто вложенным, если существует гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, переводящее этот диск в полиэдр.

Дуга, расположенная в евклидовом пространстве, называется полуспрямляемой, если при параметрическом

представлении этой дуги одна из координат задается функцией с ограниченным изменением.
А. С. Пархоменко

1226. Булевы алгебры с замыканиями и булевы алгебры с производными. Зарицкий (Алгебра Буля з замкненням і алгебра Буля з похідною), Зарицький М. О. Доповіді АН УРСР, 1955, № 1, 3—6 (укр.; рез. русс.)

Основными понятиями топологии можно считать замыкание множества и производное множество. Автор сравнивает булевы алгебры с операцией замыкания (характеризуемые хорошо известными аксиомами Куратовского) с булевыми алгебрами с операцией образования производного множества (характеризуемыми надлежащими аксиомами) и утверждает, что некоторые топологические понятия (например, совершенные множества) могут быть простым способом определены с помощью конечных теоретико-множественных операций и производных множеств, но не могут быть определены с помощью конечных теоретико-множественных операций и операции замыкания. R. Sikorski

1227. Замечание к общей теории замкнутых непрерывных отображений бикомпактных T_1-пространств. Словиковский (Note on the general theory of closed continuous mappings of bicompact T_1 spaces. Słowikowski W.), Bull. Acad. polon sci., 1955, Cl. 3, 3, № 8, 421—424 (англ.)

Замечание к общей теории замкнутых непрерывных отображений бикомпактных T_1-пространств. Словиковский В., Бюл. Польской АН. Отд. 3, 1955, 3, № 8, 417—420

Множество $\mathfrak{A}$ называется Г-алгеброй, если оно является дистрибутивной структурой с 0 и 1 и если выполняется следующее условие: $A = B$ тогда и только тогда, когда из $A + B + C = 1$ следует $AB + C = 1$ для любого элемента $C \in \mathfrak{A}$.

Каждый аддитивный и мультипликативный базис открытых множеств бикомпактного T_1-пространства является Г-алгеброй. Обратно, если для заданной Г-алгебры $\mathfrak{A}$ мы введем в пространстве $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ всех максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$ топологию, принимая за базис совокупность множеств $\Gamma_A = E_{M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})}(A \overline{\in} M)$, где $A \in \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ будет бикомпактным T_1-пространством.

Автор исследует соотношения между алгебраическими свойствами Г-алгебры $\mathfrak{A}$ и топологическими свойствами пространства $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Основной результат: если $\mathfrak{A}_0$ есть Г-подалгебра Г-алгебры $\mathfrak{A}$, то отображение f, определенное равенством $f(M) = M \cap \mathfrak{A}_0$ ($M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$), тогда и только тогда является замкнутым непрерывным отображением пространства $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ на $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_0)$, когда для произвольных элементов $A \in \mathfrak{A}_0$, $Z \in \mathfrak{A}$ существует такой элемент $B \in \mathfrak{A}_0$, что $A + Z = 1$ и $BZ = B$. S. Mrówka

1228. Обобщение теоремы Вейерштрасса на случай топологического пространства. Киртадзе Г., Тр. Батумск. гос. пед. ин-та, 1954, 4, 166—171

Дается необходимое и достаточное условие (условие А) для того, чтобы на топологическом пространстве всякая непрерывная функция была ограничена. Последовательность (открытых) множеств G_i автор называет вполне регулярной, если каждое G_{i+1} функционально отделимо от $R \setminus G_i$. Условие А: всякая вполне регулярная последовательность имеет непустое пересечение. Свойство А сохраняется при непрерывных отображениях. Для метрических пространств свойство А эквивалентно свойству компактности. Следовательно, на любом топологическом пространстве, удовлетворяющем условию А, всякая непрерывная функция принимает как наибольшее, так и наименьшее значения. Доказывается, что известное вполне регулярное, но не нормальное пространство Тихонова, будучи некомпактным пространством, обладает свойством А. Ставится вопрос о существовании нормального некомпактного пространства, обладающего свойством А.
Ю. М. Смирнов

1229. Орбитальные топологии. Паудерли, Дун Хинг (On orbital topologies. Powderly Mary, Tong Hing), Quart. J. Math., 1956, 7, № 25, 1—2 (англ.)

Пусть S — абстрактное множество и γ — отображение его в себя. Пусть $p = \gamma^n(x)$, где n — наименьшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее этому уравнению. Будем говорить, что n есть порядок пары точек (p, x) относительно γ. При $A \subset S$ скажем, что точка p принадлежит множеству A', если найдутся такая бесконечная последовательность различных точек x_i ($i = 1, 2, 3$) множества A и такая бесконечная строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел n_i, что числа n_i являются порядками пар точек (p, x_i) относительно γ. Введем топологию $S(\gamma)$ в множестве S, определив для произвольного множества A операцию замыкания равенством $\overline{A} = A + A'$.

Автор показывает, что введенная таким образом операция замыкания удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к этому понятию; построенное пространство является T_1-пространством и отображение γ непрерывно.
А. С. Пархоменко

1230. Накрывающие пространства расширений топологических пространств. Банашевский (Überlagerungen von Erweiterungsräumen. Banaschewski Bernhard), Arch. Math., 1956, 7, № 2, 107—115 (нем.)

Для односвязности локально связного хаусдорфова расширения E^* односвязного пространства E достаточно, чтобы для любой окрестности U точки $x \in E^* \setminus E$ множество $U \cap E$ не могло быть разложено на два непересекающихся открытых в E множества, замыкания которых содержат точку x (односвязность понимается в том смысле, что пространство не имеет нетривиальных накрывающих пространств). Если множество $E^* \setminus E$ состоит лишь из одной точки, то это условие также и необходимо.

Из этой теоремы вытекает, например, что пополнение односвязной локально связной топологической группы также односвязно.
А. С. Шварц

1231. О равномерной сходимости в равномерном пространстве. Нагата (On uniform convergence on uniform space. Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, A5, № 1, 53—62 (англ.)

Дается еще одно абстрактное определение равномерных пространств путем аксиоматизации понятия равномерной сходимости (к тождеству) обобщенной последовательност отображений $\varphi_\alpha(p)$ $\alpha \in A$, $p \in R$, $\varphi_\alpha(p) \in R$, где A — некоторое направление (частично упорядоченное множество, в котором для каждых двух элементов существует последующий), R — некоторое T_1-пространство. Подчиняя понятие равномерной сходимости четырем аксиомам, автор показывает, что его определение равномерных пространств эквивалентно обычному.
В. А. Ефремович

1232. О свойстве Лебега в равномерных пространствах. VI. Исеки (On the property of Lebesgue in uniform spaces. VI. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 2, 117—119 (англ.)

Предположим, что все конечные открытые покрытия равномерного пространства S обладают свойством Лебега и что пополнение $\tilde{S}$ пространства S нормально.

Тогда: 1) все конечные открытые покрытия пространства $\widetilde{S}$ обладают свойством Лебега; 2) размерности пространств S и $\widetilde{S}$ (определенные с помощью покрытий) равны между собой. А. С. Шварц

1233. О равномерной топологии функциональных пространств. Нагата (On uniform topology of functional spaces. Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, A5, № 2, 87—95 (англ.)

В кольце $C(P)$ всех непрерывных функций над данным равномерным пространством P вводится особая равномерная топология, которую автор называет m-равномерной топологией (определение будет дано ниже). Таким образом, пространства $C(P)$, $C'(P)$ (всех непрерывных функций, принимающих значения между нулем и единицей), C_uP (всех равномерно непрерывных функций) и C'_uP (всех равномерно непрерывных функций, принимающих значения между нулем и единицей) становятся равномерными пространствами. Получаемая отсюда m-топология слабее сильной топологии и сильнее слабой топологии кольца $C(P)$; однако в $C_u(P)$ она совпадает именно с сильной топологией.

Если $C_u(P)$ и $C'_u(P)$ рассматривать как равномерно топологические структуры, т. е. как структуры (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во ин. лит., М., 1952), снабженные m-равномерной топологией, то как первая, так и вторая определяют каждое полное равномерное пространство P с точностью до равномерного гомеоморфизма: равномерно топологический изоморфизм структур $C_u(X)$ и $C_u(Y)$ (соответственно $C'_u(X)$ и $C'_u(Y)$) влечет за собой равномерный гомеоморфизм пространств X и Y (теоремы 4 и 5).

Определение m-равномерной топологии кольца $C(P)$ над равномерным пространством P, заданным посредством системы покрытий $\omega_\alpha = \{U_\alpha x,\ x \in P\}$, таково: Для любого индекса α и каждого действительного числа $\varepsilon > 0$ у всякой функции $f \in C(P)$ определяется окрестность $U_{\alpha\varepsilon}f$ как множество всех тех функций $g \in C(P)$, для которых при любом $x \in P$ расстояния $\rho(f(x), g(U_\alpha x))$ и $\rho(g(x), f(U_\alpha x))$ меньше чем ε.

Если через $M(x)$ обозначить отображение, ставящее в соответствие каждой точке x пространства P действительную функцию $x(f) = f(x)$, определенную на пространстве $C'_u(P)$, то это отображение пространства P в пространство $C'(C'_u(P))$ оказывается равномерным гомеоморфизмом, причем замыкание $[M(P)]$ образа $M(P)$ в $C'(C'_u(P))$ полно в относительной равномерной топологии (теоремы 2 и 3). Ю. М. Смирнов

1234. Новые подходы к проблеме пространственных форм Римана — Гельмгольца — Ли. Фрейденталь (Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. Freudenthal Hans), Math. Z., 1956, **63**, № 4, 374—405 (нем.) .

Пусть R — локально бикомпактное связное топологическое пространство, F — транзитивная группа гомеоморфизмов пространства R на себя. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Для любых двух замкнутых не пересекающихся подмножеств пространства R, из которых по крайней мере одно компактно, можно найти такое открытое множество $U \subset R$, что при всяком $f \in F$ множество $f(U)$ пересекается не более чем с одним из этих двух подмножеств.

Это условие позволяет ввести в R инвариантную относительно группы F равномерную структуру и сделать группу F топологической.

2. Группа F полна в этой топологии.

3. Существуют такие точки x и y, что множество точек, в которые точка y переводится преобразованиями из F, оставляющими на месте x, разбивает пространство R.

Показывается, что при этих условиях F является (быть может, несвязной) группой Ли. Перечисляются все удовлетворяющие этим условиям пространства R и группы F.

Автор указывает, что этот результат был ранее без доказательства опубликован Титсом (Tits, Bull. Soc. Math. Belg., 1952, 44—52; 1953, 121—125) (Титс накладывал на R и F формально несколько более сильные ограничения). Автор считает, что его доказательство проще неопубликованного доказательства Титса.

В качестве следствия приводится, например, такая теорема. Пусть R — метрическое связное локально компактное пространство, F — группа его изометрий. Пусть далее выполнены два условия: 1) существует такое число $\gamma > 0$, что для каждой точки пространства R найдется в R другая точка, отстоящая от первой на расстояние $\geqslant \gamma$, и что любая пара точек из R, находящихся на расстоянии γ, переводится в любую другую такую же пару некоторым преобразованием группы F; 2) существует такое число γ', меньшее, чем диаметр сферы радиуса γ в R, что любые три точки, попарные расстояния которых равны γ, γ, γ', могут быть переведены в любые другие три точки, удовлетворяющие тому же условию, с помощью преобразования группы F. Тогда R является одним из классических пространств постоянной кривизны: евклидовым, эллиптическим, сферическим или гиперболическим. Перечисляются также пространства, удовлетворяющие лишь первому условию. А. С. Шварц

1235. Семейство связных подмножеств и топология пространства. Танака (On the family of connected subsets and the topology of spaces. Tanaka Tadashi), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 4, 389—393 (англ.)

Рассматриваются такие взаимно однозначные отображения одного метрического пространства со счетной базой на другое такое же пространство, при которых образы и прообразы связных множеств связны. Автор называет эти отображения обратимо связными (biconnected). Доказаны теоремы:

Теорема 1. Обратимо связное отображение пространства A на полулокально связное пространство B непрерывно. (Связное метрическое пространство B называется полулокально связным, если каждая точка пространства B имеет сколь угодно малую окрестность, дополнение которой состоит из конечного числа компонент.)

Следствие. Обратимо связное отображение пространства A на связное локально связное локально компактное пространство B непрерывно.

Теорема 2. Пусть f — обратимо связное отображение компакта A на компакт B, причем A и B обладают следующим свойством: для всякой точки p и для всякой последовательности точек $\{p_n\}$, сходящейся к p, существуют точка o, подпоследовательность $\{p_{n_i}\}$ последовательности $\{p_n\}$ и последовательность дуг $\{op_{n_i}\}$, сходящаяся к дуге op. Тогда отображение f является топологическим. А. С. Пархоменко

1236. Близостная топология многообразий. Ефремович В. А. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 53

1237. О характеристике регулярных областей в локально связных пространствах. Куратовский К., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 4, 205—209

О характеристике регулярных областей в локально-связных пространствах. Куратовский (On a caraterisation of connected domains in locally connected spaces. Kuratowski K.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, cl. 3, 4, № 4, 211—214 (англ.)

Открытое множество D называется (открытой) областью, если оно является внутренностью замкнутого множества. Автор дает следующую характеризацию связных областей в локально связном пространстве X.

Открытое связное подмножество $D \subset X$ тогда и только тогда является областью, когда

$$\Gamma_p D = \overline{\Sigma_t I_t},$$

где, для каждого t, множество I_t является неприводимым разрезом пространства X между двумя точками ($\Gamma_p D$ есть граница множества D). В случае, когда $X = S_n$ есть n-мерная сфера, это дает следующие теоремы:

1) Пусть D и E — два открытых связных подмножества сферы S_n, границы которых гомеоморфны. Если D — область, то E — также область.

2) Если дополнение $S_2 \setminus C$ локально связного континуума $C \subset S_2$ является областью, то

$$\Gamma_p C = \overline{\Sigma_n K_n},$$

где K_n ($n = 1, 2, \ldots$) есть простая замкнутая кривая.

J. W. Jaworowski

1238. Характеристика плоских непрерывных кривых, допускающих непрерывное разбиение на непрерывные кривые Хамстром (A characterization of plane continuous curves which are filled up by continuous collections of continuous curves. Hamstrom Mary Elizabeth), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 914—928 (англ.)

Даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы пространство разбиения G локально связного континуума M на невырожденные локально связные континуумы было простой дугой (теорема 2) или простой замкнутой линией (теорема 3). В последнем случае данный континуум M должен быть кольцом.

А. С. Пархоменко

1239. О пространствах, заполненных непрерывными семействами атриодических непрерывных кривых. Андерсон, Хамстром (On spaces filled up by continuous collections of atriodic continuous curves. Anderson R. D., Hamstrom Mary-Elizabeth), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 766—769 (англ.)

Пусть G — невырожденное семейство простых дуг и простых замкнутых кривых и M — теоретико-множественная сумма элементов семейств G. Предполагается, что M есть (метрический) континуум и что G вполне непрерывно (естественное отображение континуума M на пространство разбиения G непрерывно и открыто).

Основные результаты работы: 1) Не существует замкнутого вполне несвязного множества, разбивающего M. 2) Если пространство G одномерно, то M имеет размерность 2 в каждой своей точке. 3) Если G содержит только простые дуги, то утверждение 1) остается справедливым, если заменить M любым его связным открытым подмножеством. 4) Если G — двумерное канторово многообразие, то не существует рациональной кривой, разбивающей M.

Утверждения 1), 2) доказаны полностью, остальные доказательства лишь намечены.

F. Albrecht

1240. Разложение континуумов в апосиндетические континуумы. Мак-Оли (On decomposition of continua into aposyndetic continua. McAuley Louis F.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 1, 74—91 (англ.)

Пространство M называется апосиндетическим в точке p относительно точки x, если существует такое связное замкнутое множество N пространства M и такое открытое относительно M множество O, что $M \setminus x \supset N \supset O \ni p$. Если M апосиндетично в точке p по отношению к каждой точке x множества $M \setminus p$, то говорят, что M апосиндетично в точке p. Если пространство M апосиндетично в каждой своей точке, то оно называется апосиндетическим.

Отправляясь от связного T_1-пространства M со счетной базой, автор разными способами строит полунепрерывные сверху разбиения пространства M и получает таким образом различные «гиперпространства», обладающие теми или иными свойствами и, в частности, свойством быть апосиндетическим. Беря в качестве M континуум, автор получает в качестве гиперпространства апосиндетический континуум, а при дополнительных требованиях на характер разбиения — непрерывную кривую.

Работа заканчивается рассмотрением случая плоских континуумов.

А. С. Пархоменко

1241. Однопараметрические группы преобразований трехмерной сферы. Джакоби (One-parameter transformation groups of the three-sphere. Jacoby Robb), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 131—142 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть R — множество всех действительных чисел, S — трехмерная сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ и T — непрерывное отображение произведения $R \times S$ в S, подчиненное следующим условиям: а) для любых $t_1, t_2 \in R$ и произвольного $x \in S$

$$T(t_1 + t_2, x) = T(t_1, T(t_2, x)),$$

б) $T(1, x) = x$ для любого $x \in S$; напротив, не существует t, заключенного между 0 и 1, для которого $T(t, x) = x$ при всех $x \in S$; в) не существует $x \in S$, для которого $T(t, x) = x$ при всех $t \in R$. Тогда существуют два вполне определенные взаимно простые целые числа k' и k'', $1 \leqslant k' \leqslant k''$, и гомеоморфное отображение φ сферы S на себя, такие, что $T(t, \varphi x) = \Phi(\Pi_{(k', k'')}(t, x))$ для всех $t \in R$ и $x \in S$, где $\Pi_{(k', k'')}$ — отображение произведения $R \times S$ в S, причем

$$\Pi_{(k', k'')}(t, x) = \Pi_{(k', k'')}(t, (x_1, x_2, x_3, x_4)) =$$

$$= (x_1 \cos 2\pi k' t + x_2 \sin 2\pi k' t, -x_1 \sin 2\pi k' t +$$

$$+ x_2 \cos 2\pi k' t, x_3 \cos 2\pi k'' t + x_4 \sin 2\pi k'' t,$$

$$- x_3 \sin 2\pi k'' t + x_4 \cos 2\pi k'' t)$$ для всех $t \in R$, $x \in S$.

А. С. Пархоменко

1242. Достаточное условие существования неподвижной точки при некоторых автоморфизмах евклидовых пространств. Георгиев (Едно достатъчно условие за съществуване на неподвижна точка при някои автоморфизми на евклидовите пространства. Георгиев Г. И в.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955), 1, ч. 2, 151—153 (болг.; рез. русс., франц.)

Устанавливается тривиальное следствие теоремы Брауера о неподвижных точках отображений элемента в себя.

В. А. Ефремович

1243. Об одном свойстве нормальных замкнутых ориентируемых поверхностей. Георгиев (Едно свойство на нормалните затворени ориентируеми повърхнини. Георгиев Г. И в.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955), 1, ч. 2, 155—158 (болг.; рез. русс., франц.)

См. реф. 1242

1244. О слоях в стягиваемых расслоенных пространствах. Сугавара (On fibres of fibre spaces whose total space is contractible. Sugawara Masahiro), Math. J. Okayama Univ., 1956, 5, № 2, 127—131 (англ.)

Пусть в расслоении (E, B, F) в смысле Серра расслаиваемое пространство E может быть так продеформировано по себе в точку x_0 слоя F, что при этой деформации точка x_0 остается неподвижной. Предположим, что пространство E является CW-комплексом в смысле Уайтхеда (см. Постников М. М., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 46, стр. 133), а слой F — локально конечным CW-комплексом. Тогда могут быть определены отображения $\mu: F \times F \to F$ и $\sigma: F \to F$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $\mu(x_0, x) = \mu(x, x_0) = x$; 2) отображения пространства $F \times F \times F$ в F, задаваемые формулами $(x, y, z) \to \mu(\mu(x, y) z)$ и $(x, y, z) \to \mu(x, \mu(y, z))$, гомотопны; 3) отображения пространства F в F, определяемые формулами $x \to \mu(x, \sigma(x))$ и $x \to \mu(\sigma(x), x)$, гомотопны тождественному отображению. Иначе говоря, слой F может быть сделан гомотопически ассоциативным H-пространством с гомотопически обратимым умножением. А. С. Шварц

1245. Расслоение пространства отображений. Болтянский В. Г., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 299—309

Автор называет s-пространством локально стягиваемое линейно связное пространство, допускающее эффективную транзитивную группу преобразований, расслоение которой по стационарной подгруппе обладает локальными секущими поверхностями.

Пусть S — некоторое s-пространство, X — бикомпакт, A — замкнутое подмножество бикомпакта X, I — единичный отрезок. Обозначим через P пространство всех отображений произведения $X \times I$ в S, переводящих множество $X \times 0 \cup A \times I$ в фиксированную точку $q \in S$. Через B обозначим пространство, состоящее из всех отображений бикомпакта X в S, переводящих множество A в q и гомотопных относительно A постоянному отображению. Пространство P естественным образом отображается в пространство B: именно, элементу $\xi \in P$ ставится в соответствие отображение $\eta \in B$, задаваемое формулой $\eta(x) = \xi(x, 1)$. Доказывается, что это отображение пространства P в B является локально тривиальным расслоением пространства P с базой B и слоем C, который состоит из всех элементов пространства P, переводящих множество $X \times 1$ в точку q. Показывается, что при подходящем выборе группы преобразований слоя (в качестве структурной группы) это расслоение является косым произведением.

Пусть C_0 — произвольное s-пространство (например, линейно связное многообразие), а пространства $S_1, P_1, C_1, \ldots, S_n, P_n, C_n, \ldots$ определены таким образом, что P_i есть пространство путей в пространстве S_i, начинающихся в фиксированной точке, C_i — подмножество пространства P_i, состоящее из замкнутых путей, S_{i+1} — универсальное накрывающее пространство для C_i. Тогда из сформулированной выше теоремы можно вывести, что P_i есть пространство косого произведения с базой S_i и слоем C_i. Это показывает, что рассматриваемые в работе Серра (Serre J. P., Ann. Math., 1951, 54, № 3, 425—505) конструкции укладываются в рамки теории косых произведений. А. С. Шварц

1246. Кольца когомологий многообразий линейных элементов n-мерной сферы. Цзян Цзэ-хань, Чжоу Юй-линь, Хэ Си-чжан (球上線素的流形的上同調環. 江澤涵, 周毓麟, 賀錫章), 北京大學學報 (自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (Цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 2, 111—128 (кит.; рез. англ.)

С помощью клеточных разбиений вычисляются кольца когомологий (целочисленные и по модулю 2) многообразий ориентированных и неориентированных линейных элементов n-мерной сферы.

Примечание референта. Кольца когомологий многообразия ориентированных линейных элементов n-мерной сферы (гомеоморфного штифелевскому многообразию $V_{n+1,2}$) хорошо известны, кольца когомологий многообразия неориентированных линейных элементов сферы легко получить, исходя из известных общих теорем (например, из точной последовательности Вана). А. С. Шварц

1247. Формулы приведения для стинродовских отображений D_i в сингулярной кубической теории когомологий. Кудо, Мукода, Сайто (Reduction formulas for Steenrod's D_i in the cubic singular cohomology theory. Kudo Tatsuji, Mukohda Shunji, Saito Shiroshi), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, A9, № 2, 101—110 (англ.)

Даются формулы, с помощью которых можно определить циклические приведенные степени Стинрода в сингулярных кубических группах когомологий. А. С. Шварц

1248. О приведенных степенях Стинрода в сингулярных гомологических теориях. Араки (On the Steenrod's reduced powers in singular homology theories. Araki Shoro), 九州大學部紀要, (Кюсю дайгаку ригакубу киё), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, A9, № 2, 159—173 (англ.)

Автор показывает, каким образом циклические приведенные степени Стинрода могут быть непосредственно определены в сингулярных симплициальных и кубических группах когомологий, и доказывает, что при этом в сингулярных группах когомологий получаются одни и те же операции. (Сингулярные симплициальные и кубические группы гомологий совпадают, поэтому можно говорить просто о сингулярных группах гомологий.) А. С. Шварц

1249. Теорема о трансгрессии. Кудо (A transgression theorem. Kudo Tatsuji), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, A9, № 2, 79—81 (англ.)

Пусть $E_2, \ldots, E_r, \ldots$ — спектральная последовательность алгебр когомологий по простому модулю p расслоенного пространства (E, B, F) в смысле Серра. Элемент $a \in E_r^{p,q}$ называется трансгрессивным, если $d_i \varkappa_i^r(a) = 0$ при $i \leqslant q$.

Теорема. Если элемент $a \in E_2^{0,2k}$ трансгрессивен и $d_{2k+1} \varkappa_{2k+1}^2(a) = \varkappa_{2k+1}^2(b)$, где $b \in E_2^{2k+1,0} = H^{2k+1}(B)$, то элемент ba^{p-1} также трансгрессивен и $d_{2(p-1)k+1} \varkappa_{2(p-1)k+1}^2(ba^{p-1}) = \varkappa_{2(p-1)k+1}^2(-\Delta_p P_p^k b)$, где $\Delta_p: H(B, Z_p) \to H^{i+1}(B, Z_p)$ — гомоморфизм Бокштейна, а P_p — циклическая приведенная степень Стинрода. А. С. Шварц

1250. Доказательство одного предположения Хопфа. У Вэнь-цзюнь (Proof of a certain conjecture of H. Hopf. Wu Wen-Tzün), Чжунго кэсюэ, Acta Sci. Sinica, 1955, 4, № 4, 491—500 (англ.)

Доказательство одного предположения Хопфа. У Вэнь-цзюнь (一個H. Hopf推測的證明. 吳文俊), 數學學報, (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 4, 491—500 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — ориентируемый пучок двумерных сфер над конечным комплексом K, имеющий над K^3 секущую поверхность. Хопф определил (Hopf, Colloque de topo-

logie à Bruxelles, 1950, 117—121; Colloque international de topologie algébrique à Paris, 1947, 55—59) для такого пучка некоторый инвариант $\Delta^4(\mathfrak{S}) \in H^4(K)$ и высказал предположение, что этот инвариант тесно связан с четырехмерным понтрягинским классом $P^4(\mathfrak{S})$ пучка $\mathfrak{S}$. Автор доказывает соотношение $\Delta^4(\mathfrak{S}) = -P^4(\mathfrak{S})$, подтверждающее это предположение.

Прежде всего автор описывает формулу второго препятствия, принадлежащую Хопфу и референту (Докл. АН СССР, 1951, **80**, 305—307). В эту формулу входит двумерный класс когомологий, обозначаемый автором через $\Omega^2_{f,f}$ (здесь f — некоторая секущая поверхность) и представляющий собой класс когомологий препятствия к снятию секущей поверхности f с гомотопной ей поверхности (РЖМат, 1956, 3732). Автор дает другое описание этого класса когомологий, по существу совпадающее с описанием, данным референтом.

Доказательство основной формулы $\Delta^4(\mathfrak{S}) = -P^4(\mathfrak{S})$ рассматривается сначала для двух частных случаев: 1) случай, когда базисное пространство K является четырехмерной сферой; 2) случай, когда над четырехмерным остовом существует секущая поверхность рассматриваемого пучка. Рассмотрение общего случая сводится к этим двум с помощью следующего интересного приема: рассматривается вспомогательный пучок $\mathfrak{S}'$, удовлетворяющий условию 2) и совпадающий с $\mathfrak{S}$ над трехмерным остовом комплекса K.

Из доказанной формулы вытекает инвариантность хопфовского класса когомологий $\Delta^4(\mathfrak{S})$.

В. Г. Болтянский

1251. Двойственные гомологические последовательности. Альбер С. И., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 5, 763—766

Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подкомплексы ориентируемого замкнутого многообразия M, причем A является деформационным ретрактом множества $M \setminus B$, а B — деформационным ретрактом множества $M \setminus A$. Пусть Γ и Φ — двойственные в смысле теории характеров дискретная и бикомпактная группы, p и q — натуральные числа, дающие в сумме размерность n многообразия M. Тогда точные последовательности групп гомологий пары (M, A) с коэффициентами в группе Γ и пары (M, B) с коэффициентами в группе Φ двойственны, т. е. в точных последовательностях

$$\to H_p(A, \Gamma) \to H_p(M, \Gamma) \to H_p(M, A, \Gamma) \to H_{p-1}(A, \Gamma) \to \ldots$$

$$\ldots \leftarrow H_q(M, B, \Phi) \leftarrow H_q(M, \Phi) \leftarrow$$

$$H_q(B, \Phi) \leftarrow H_{q+1}(M, B, \Phi) \leftarrow \ldots$$

группы, стоящие одна под другой, двойственны, а гомоморфизмы, расположенные один под другим, сопряжены.

Эта теорема неявно использовалась Понтрягиным и автором в их работах по вычислению гомологий групп Ли и однородных многообразий (Понтрягин Л. С., Матем. сб., 1942, **11**, 1,3; Альбер, Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6; 1954, **98**, № 3; 1955, **104**, № 3). А. С. Шварц

1252. Топология функционалов. Деэвель (Topologie d'une fonctionnelle. Deheuvels René), Ann. Math., 1955, **61**, № 1, 13—72 (франц.)

Цель работы — уточнить, развить и обобщить теорию Морса критических значений числовых функций. Краткое изложение результатов было опубликовано ранее (РЖМат, 1955, 144, 823, 4939). Изложение ведется в большой общности, но здесь мы изложим только теоретико-функциональную интерпретацию полученных автором результатов.

Пусть φ — действительная числовая (значения $\pm\infty$ не исключены) функция, определенная на топологическом пространстве X, A — кольцо сингулярных коцепей пространства X над некоторым полем (отдельные результаты остаются справедливыми и для более общих областей коэффициентов); $A(p)$ — идеал кольца A, состоящий из коцепей, равных нулю на сингулярных симплексах области меньших значений $[\varphi < p]$, $E(p, q) = H(A(p)/A(q))$ $(p \leqslant q)$, $E(p, q, r, s)$ — образ кольца $E(q, s)$ при естественном отображении $E(q, s) \to E(p, r)$, $s \geqslant q \geqslant p$, $s \geqslant r \geqslant p$, $E(r, r^+) = \varlimsup\limits_{\substack{0<\eta\to 0\\ 0<\varepsilon\to 0}} E \times (r, r, r+\varepsilon, r+\eta)$ и $\Gamma = \Sigma_r E(r, r^+)$. Число r называется критическим значением функции φ, если $E(r, r^+) \neq 0$. Оказывается, что в кольце Γ можно определить дифференциал d, кольцо гомологий которого изоморфно (изоморфизм не естественный) кольцу когомологий $H(X)$ пространства X. При соответствующих условиях конечности отсюда легко следуют известные неравенства Морса. М. М. Постников

1253. К общей теории точечных преобразований. Гуггенхеймер (Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali. Guggenheimer Heinrich), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 474—477 (итал.)

Непрерывным соответствием $T(\alpha_1, \alpha_2)$ между двумя топологическими пространствами X и Y называется многозначное отображение пространства X на Y, для которого найдутся подмножества $A \subset X$ и $B \subset Y$, называемые особыми подмножествами (по-видимому, предполагается, что они замкнуты), имеющие меньшие размерности, чем сами пространства X и Y, и такие, что на множествах $X \setminus A$ и $Y \setminus B$ отображения T и T^{-1} непрерывны и при этих отображениях каждой точке $x \in X \setminus A$ соответствует фиксированное число α_1 точек $y \in Y \setminus B$, а каждой точке $y \in Y \setminus B$ — фиксированное число α_2 точек $x \in X \setminus A$. Точечное преобразование есть дифференцируемое соответствие $T(1, 1)$ между двумя проективными пространствами одинаковой размерности.

Автор изучает связь между сингулярными группами гомологий особых множеств A и B при соответствии $T(1,1)$. Так как при этом множества $X \setminus A$ и $Y \setminus B$ гомеоморфны и так как относительные группы гомологий $H_i(X, A)$ совпадают с группами $H_i(X \setminus A)$, то имеет место изоморфизм $H_i(X, A) \cong H_i(Y, B)$. Поэтому из рассмотрения точной последовательности $\ldots \leftarrow H_{i-1}(X, A) \leftarrow H_{i-1}(X) \leftarrow H_{i-1}(A) \leftarrow H_i(X, A) \leftarrow \ldots$ и аналогичной последовательности для второго пространства Y в случае, когда X и Y — два комплексных проективных пространства одинаковой размерности, вытекает соотношение $p_{2i}(A) - p_{2i-1}(A) = p_{2i}(B) - p_{2i-1}(B)$, а в случае двух действительных проективных пространств одинаковой размерности — соотношение $p_i(A) = p_i(B)$ между числами Бетти особых множеств. В общем случае получаем соотношение $\chi(X) - \chi(A) = \chi(Y) - \chi(B)$ между эйлеровыми характеристиками. Из тех же точных последовательностей, как указывает автор, можно получить информацию и о группах кручения для особых множеств $T_i(A)$ и $T_i(B)$, однако эта информация в действительности гораздо беднее, чем это думает автор, ибо прямое разложение целочисленной группы гомологий на группу слабых гомологий и группу кручения, которое автор считает естественным, в действительности таковым не будет — естественно определяется лишь группа кручения, как подгруппа элементов конечного порядка. Так, например, для случая двух комплексных проективных пространств X и Y одинаковой размерности приводимое автором соотношение $T_i(A) = T_i(B)$ может быть выведено из вышеприведенных точных последовательностей

лишь для четных значений числа i, как показывает пример двух точных последовательностей $0 \leftarrow 0 \leftarrow Z \leftarrow \leftarrow Z \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0$ и $0 \leftarrow Z_2 \leftarrow Z \leftarrow Z \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0$, где слева стоят группы $H_1(X)$ и $H_1(Y)$, а справа — группы $H_3(X)$ и $H_3(Y)$; Z здесь обозначает аддитивную группу целых чисел, Z_2 — группу целочисленных вычетов по модулю 2, отображение $Z \to Z$ в первой последовательности переводит каждое целое число в такое же число, а во второй последовательности — в удвоенное число; тогда условия, которыми пользуется автор, $H_2(X, A) = H_2(Y, B)$, $H_3(X, A) = H_3(Y, B)$, $H_1(X) = H_1(Y) = H_3(X) = H_3(Y) = 0$, $H_2(X) = H_1(Y) = Z$ выполняются (ибо X и Y — комплексные проективные пространства), а тем не менее $T_2(A) = H_2(A) = 0$, $T_2(B) = H_2(B) = Z_2$.

Опечатки: В точных последовательностях на стр. 475 нужно переставить $(P_n, A; R)$ с $(A; R)$ и $(P_n, B; R)$ с $(B; R)$. М. Ф. Бокштейн

1254. О сигнатуре алгебраических многообразий. Гуггенхеймер (Sur la signature des variétés algébriques. Guggenheimer H.), Bull. Res. Council Israel, 1955, **A5**, № 1, 23—25 (франц.; рез. англ.)

Сигнатурой $\tau(M)$ ориентированного компактного многообразия M размерности $4k$ называется сигнатура квадратичной формы, определяемой индексом пересечения на $2k$-мерной группе действительных гомологий этого многообразия. Пусть M и M' — алгебраические многообразия, связанные бирациональным соответствием и $V \subset M$, $V' \subset M'$ — подмногообразия исключительных точек при этом соответствии. Предполагается, что M, M', V, V' не имеют особенностей и обладают четными комплексными размерностями. Тогда $\tau(M) - \tau(V) = \tau(M') - \tau(V')$.

Доказательство основано на формуле Ходжа

$$\tau(M) = \sum_{r=0}^{2k} \sum_{s=0}^{2k} (-1)^s p_{r,s},$$

где $p_{r,s}$ — число линейно независимых внешних гармонических форм на M, однородных степени r по dz_i и однородных степени s по $d\bar{z}_j$. Есть опечатки. В. А. Рохлин

1255. Итерационные системы. Георгиев (Итерационни системи. Георгиев Георги И в.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955), **1**, ч.2, 31—120 (болг.; рез. русс., франц.)

Пусть H — гомеоморфное отображение пространства R на себя. Итерационной системой называется множество итераций H^k отображения H ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Для итерационных систем доказываются теоремы, аналогичные теоремам общей теории динамических систем (В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949, гл. 5). В более общей постановке эта задача рассматривалась ранее В. В. Немыцким (Матем. сб., 1948, **23** (65) 161—186) и рефератом (Докл. АН СССР, 1946, **51**, № 1, 3—5). Е. А. Барбашин

1256 К. Семинар Картана, год 1948/1949. Картан, Серр, Серф, Самюэль, Диксмье, Френкель (Séminaire H. Cartan (1948/1949). Cartan H., Serre J. P., Cerf J., Samuel P., Dixmier, Frenkel), Sémin. H. Cartan. Ecole norm. supér., 1948/1949 (1955), **1**, № 2, 1—9; № 3, 1—5; № 4, 1—10; № 5, 1—8; № 6, 1—4; № 7, 1—10; № 8, 1—7; № 9, 1—6; № 10, 1—9; № 11, 1—12 (франц.)

Второе издание Трудов Семинара Картана за 1948/1949 г. Переиздана только первая половина (сообщения 1—11). Вторая половина (сообщения 12—17), посвященная теории пучков, опущена, так как усовершенствованное изложение этой теории дано в Трудах Семинара за 1950/1951 г.

Сообщение 1, написанное Картаном, посвящено изложению элементарных свойств симплициальных комплексов (РЖМат, 1956, 2851).

В сообщении 2, написанном Серром, определяются целочисленные группы гомологий симплициальных комплексов. В порядке обобщения излагается теория дифференциальных групп, которая доведена до построения точной последовательности пары дифференциальных групп.

В сообщении 3, написанном Серфом, излагаются необходимые для построения теории гомологий свойства абелевых групп.

Сообщение 4, написанное Самюэлем, посвящено изложению теории групп когомологий, на основе предварительно развитой теории групп гомоморфизмов. Доказаны простейшие частные случаи формулы универсальных коэффициентов. Строятся группы когомологий с компактными носителями локальноконечных симплициальных комплексов. Рассказывается о кольце когомологий симплициального комплекса; вводится (и иллюстрируется на примерах) общее понятие дифференциального градуированного кольца.

В сообщении 5, написанном Диксмье и дополненном Картаном, излагается теория групп сингулярных гомологий (и когомологий). Кроме классических сингулярных гомологий (когомологий), рассматриваются (для локально компактных пространств) также группы сингулярных гомологий (когомологий) с компактными носителями. Устанавливается связь этих групп с группами, рассмотренными в сообщении 4.

Сообщение 6, написанное Картаном, посвящено теории групп когомологий Александера—Чеха как с любыми, так и, специально, с компактными носителями.

Сообщения 7, 8 и 9, написанные Картаном, посвящены операторам гомотопии. На основе общей теории операторов гомотопии рассматриваются барицентрические подразделения в группах (сингулярных) цепей. Устанавливаются классические соотношения между различными теориями гомологий, введенными в предыдущих сообщениях. Например, доказывается, что группы сингулярных гомологий (локально конечного) полиэдра изоморфны группам гомологий любого его симплициального разбиения.

В сообщении 10, написанном Френкелем, излагается (по Стинроду) теория сингулярных гомологий и когомологий с конечными коэффициентами. Отмечается, что в теории гомологий Александера—Чеха предпочтительнее в качестве коэффициентов использовать не локальные семейства групп в смысле Стинрода, а пучки в смысле Лере (последний термин автором не употребляется).

В последнем сообщении 11, написанном Серром и Картаном, рассматриваются тензорные произведения групп. Основной результат — доказательство формулы Кюннета. М. М. Постников

1257 К. Топологические и метрические пространства. Шоке (Espaces topologiques et espaces métriques. Choquet Gustave. Paris, docum. univ., 1955, ii, 82 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 20, 463 (франц.)

1258 К. Алгебры Эйленберга — Маклейна и гомотопии. Серр, Картан, Том, Мур (Algèbres d'Eilenberg — Mac Lane et homotopie. Serre Jean-Pierre, Cartan Henri, Thom René, Moore John C. (Ecole normale supérieure. Séminaire Henri Cartan, 1954—1955, 7), Paris, Secr. math., 1955, n. p.— Polytypé), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 9, 198 (франц.)

См. также: 1158, 1172, 1182, 1208, 1210, 1211, 1218, 2275, 1318, 1393, 1454, 1514—1516, 1771, 1785

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1259. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 2, 179—182

Содержится ряд результатов, примыкающих к тринадцатой проблеме Гильберта (Hilbert D., Gesammelte Abhandl., 1935, 3). Пусть E^n — единичный куб n-мерного пространства. Устанавливается, что при любом $n > 3$ существует $2n$ непрерывных действительных функций g_1^k, g_2^k $(k = 1, \ldots, n)$, заданных на E^{n-1}, через которые любая заданная на E^n непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражается в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r=1}^{n} h^r [x_n, g_1^r(x_1, \ldots, x_{n-1}), g_2^r(x_1, \ldots, x_{n-1})],$$

где функции h^r заданы и непрерывны на E^3.

Этот факт является следствием другой теоремы (теорема 2), показывающей, что любая непрерывная функция трех переменных может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных, если допустить, чтобы промежуточные переменные принимали значения, принадлежащие универсальному дереву Ξ (дереву, т. е. локально связному континууму, не содержащему в себе гомеоморфного образа окружности, в котором содержатся гомеоморфные образы всех деревьев, см. Menger K., Kurventheorie, Berlin—Leipzig, 1932). Упомянутая теорема 2, в свою очередь, вытекает из такого утверждения автора:

При любом $n \geqslant 2$ существует $n+1$ непрерывных функций φ^k $(k = 1, \ldots, n+1)$, заданных на E^n и принимающих значения, принадлежащие универсальному дереву Ξ, таких, что любая заданная на E^n действительная непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r=1}^{n+1} h^r [\varphi^r(x_1, \ldots, x_n)],$$

где действительные функции $h_f^r(\xi)$ определены и непрерывны на Ξ, а также непрерывно зависят от f в смысле топологии равномерной сходимости в пространствах непрерывных функций на E^n и Ξ.

Приводятся три леммы, на которые опирается доказательство этого предложения.

Кроме того, формулируется еще одна теорема, из которой, в частности, вытекает, что всякую непрерывную функцию трех переменных можно с любой степенью точности аппроксимировать конечной суперпозицией (кратности 3) многочленов от двух переменных.

А. Ф. Тиман

1260. Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных. Колмогоров А. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 28—29

Тезисы доклада на 3-м Всесоюзном математическом съезде. Пусть F — некоторый класс функций, $N_F^a(\varepsilon)$ — минимальное число точек в ε-сети на F и $N_F^c(\varepsilon)$ — максимальное число функций из F, находящихся в смысле соответствующей метрики попарно на расстоянии большем, чем ε. Первая часть доклада посвящена вопросу об асимптотических оценках величин $I_F^a(\varepsilon) = \ln N_F^a(\varepsilon)$ и $I_F^c(\varepsilon) = \ln N_F^c(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ для некоторых классов аналитических функций и функций, обладающих заданным числом производных. Подчеркивается значение подобных исследований для вычислительной математики и теории информации. Вторая часть посвящена различным возможным подходам к задачам точного или приближенного представления функций нескольких переменных при помощи тех или иных формул, содержащих функции меньшего числа переменных. Третья часть посвящена задачам, примыкающим к тринадцатой проблеме Гильберта. Здесь, кроме опубликованных результатов автора (реф. 1259), рассматривается также вопрос о возможности представления функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных, имеющих заданное число производных (Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955, гл. 7), с точки зрения оценок роста характеристик $N_F^a(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

А. Ф. Тиман

1261. Введение ограниченно аддитивной и тотально аддитивной меры. I, II. Риддер (Die Einführung von beschränkt- und total-additivem Masz. I, II. Ridder J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 2, 143—154, 155—165; Indagationes math., 1956, **18**, № 2, 143—154, 155—165 (нем.)

Приводятся новые варианты теории меры, конечноаддитивной и счетноаддитивной, со следующими отличительными чертами: а) рассматриваются действительные аддитивные функции (меры) произвольного знака, принимающие лишь конечные значения; б) эти функции определены на произвольных телах (в смысле Хаусдорфа), без предположения конечности или σ-конечности (т. е. без предположения, что все пространство может быть покрыто счетной системой измеримых множеств).

Аддитивная функция называется ограниченно аддитивной, если она ограничена на совокупности всех измеримых подмножеств любого измеримого множества. В части I изучаются продолжения ограниченно аддитивных и ограниченно счетноаддитивных мер, а также ограниченно аддитивные и ограниченно счетноаддитивные меры в произведениях пространств.

В части II даются различные («геометрические» и «аналитические») определения «интегралов Римана» и «интегралов Лебега», основанные на вариантах теории меры, изложенных в части I, а также соответствующие «теоремы Фубини».

В. А. Рохлин

1262. Об эффективно неограниченных аддитивных функциях множеств. Гладкий А. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 79

1263. Новые теоремы о $(r-1)$-мерной мере в r-мерном пространстве. Де-Джорджи (Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. De Giorgi Ennio), Ricerche mat., 1955, 4, 95—113 (итал.)

Определения и обозначения см. РЖМат, 1955, 5696. Приводится ряд теорем, относящихся к теории $(r-1)$-мерной меры в r-мерном пространстве S_r, в которых используется понятие функции Гаусса—Грина относительно множества $E \subset S_r$ с конечным периметром (являющейся некоторой векторной вполне аддитивной функцией $\Phi(B)$ борелевского множества B), вводимое автором понятие приведенной границы $\mathcal{F}^*E$ множества E, классы Γ_{r-1}, Γ_{r-1}^* некоторых выделенных множеств в S_r.

П. И. Романовский

1264. Свойство меры Хаусдорфа. Дейвис (A property of Hausdorff measure. Davies Roy O.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 30—34 (англ.)

Для определения s-мерной меры Хаусдорфа предварительно строится ее δ-приближение как сумма s-тых степеней диаметров множеств, покрывающих данное. При этом возникает четыре различные возможности, смотря по тому, рассматривать покрывающие выпуклые множества открытыми или замкнутыми и требовать от диаметров выполнения неравенства $<\delta$ или $\leqslant\delta$. Все четыре возможности дают одну и ту же меру Хаусдорфа, но различные δ-приближения при некоторых δ.

Как известно, для возрастающей последовательности множеств $\{E_n\}$ имеем $\Lambda^s E_n \to \Lambda^s (\Sigma_{n=1}^{\infty} E_n)$, где $\Lambda^s E$ означает s-мерную меру Хаусдорфа. Показывается, что это свойство сохраняется для δ-приближений, если считать покрывающие множества замкнутыми с диаметрами $\leqslant\delta$, и может не сохраняться при других трех определениях δ-приближения меры Хаусдорфа. Показывается также, что для заданных δ и s множество E можно разбить на части $E = E' + E''$ таким образом, что $\Lambda_\delta^s E' = \Lambda^s E'$, а для E'' существует такое покрытие выпуклыми множествами $U^1, U^2, \ldots$ с диаметрами $\leqslant\delta$, что $\Lambda_\delta^s E'' = \Sigma_{r=1}^{\infty} (dU^r)^s$. Р. С. Гутер

1265. О хаусдорфовой мере линейных A-множеств. Тейлор (On the Hausdorff measure of linear A-sets. Taylor S. J.), Nieuw arch. wiskunde, 1955, **3**, № 1, 6—12 (англ.)

Линейным A-множеством автор называет множество точек прямой, не содержащее трех точек, принадлежащих одной арифметической прогрессии. Известно, что всякое такое множество имеет лебегову меру нуль и что существуют линейные A-множества размерности 1 по Хаусдорфу.

Доказывается, что для любого $1/2 < \alpha < 1$ существует совершенное линейное A-множество, h_α-мера которого положительна, где $h_\alpha(x) = x \exp[(-\log x)^\alpha]$. Р. С. Гутер

1266. Теорема Крейна — Мильмана и выметание мер в теории потенциала. I, II, III. Мацусита (Théorème de Krein — Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel. I, II, III. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 10, 643—647; 1956, **32**, № 1, 29—34; № 2, 125—130 (франц.)

Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства E с замыканием $\bar{D}$ и границей Γ. Через $H(D)$ обозначим линейное пространство функций $f(x)$ вида $f(x) = \int_Q r^{2-n}(x, y)\, d\mu(y)$, где Q есть компакт из $E - \bar{D}$, меняющийся с изменением $f(x)$, $r(x, y)$ — расстояние между точками x и y и μ — мера на Q.

Каждой нормированной мере μ_0 на $\bar{D}$ относим среднее значение f, именно $\mu_0\hat{}(f) = \int_{\bar{D}} f(y)\, d\mu_0(y)$ для каждого f из $H(D)$. Совокупность этих средних обозначим $M\hat{}(D)$. Это выпуклый компакт средних (в слабой топологии сопряженного к $H(D)$ пространства; здесь $\|f\| = \sup_{x\in E} |f(x)|$).

В предложениях 1 и 2 (часть I) доказывается, что если точки $\bar{D}$ рассматривать как элементы $M\hat{}(D)$ (средние значения на функциях из $H(D)$), то множество экстремальных точек $M\hat{}(D)$ содержится в обычной границе Γ и его выпуклая, замкнутая в слабой топологии, оболочка совпадает с $M\hat{}(D)$. Далее доказывается формула (3.2): Если $\mu_0\hat{} \in M\hat{}(D)$, то $\mu_0\hat{}(f) = \int_\Gamma f d\mu_\Gamma$ для $f \in H(D)$, где μ_Γ — нормированная мера на Γ; меру μ_Γ, относимую мере μ_0, автор называет «выметанием» меры μ_0 на Γ. Вышеуказанные результаты автора содержатся непосредственно в теореме 1 заметки референта (Докл. АН СССР, 1952, **87**, № 1, 9—10), если учесть, что элементы $H(D)$, будучи гармоническими функциями в $\bar{D}$, могут достичь наибольшего и наименьшего значения лишь на Γ. Доказывается следующая лемма: Пусть $\{D_j\}$ — последовательность областей в E с компактными границами Γ_j, причем $\bar{D}_{j+1} \subset D_j$ и $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{D}_j = \bar{D}$. Если ν — нормированная мера на $\bar{D}$ и ν_j — выметание меры ν на Γ_j, то имеется подпоследовательность $\{\nu_{j'}\}$, слабо сходящаяся к мере ν_Γ^0, являющейся выметанием ν на Γ. Если мера ν сосредоточена на компакте $Q \subset D$, то выметание ν на Γ единственно.

Точку x границы Γ автор называет регулярной, если $\int_{\bar{D}} r^{2-n}(x, y)\, d\mu(y) = \int_\Gamma r^{2-n}(x, y) d\mu_\Gamma^0(y)$ для всех нормированных мер μ на $\bar{D}$ и соответствующих выметаний μ_Γ^0 меры μ на Γ, построенных по лемме; остальные точки Γ называются иррегулярными (это определение отличается от обычного).

В части II доказывается, что множество Γ_0 регулярных точек границы Γ конечной области D совпадает с той частью Γ, которой в $M\hat{}(D)$ отвечает множество экстремальных точек $M\hat{}(D)$. Вводится обычное понятие емкости множества и доказывается, что емкость множества иррегулярных точек равна нулю. Доказывается теорема: Если D есть конечная область с границей Γ и $f(x)$ — вещественная непрерывная функция на Γ, то имеется одна единственная функция $\hat{f}(x)$, гармоническая и ограниченная в D, с граничными значениями, совпадающими с $f(x)$ на Γ_0.

В части III предыдущие результаты обобщаются на случай произвольной области. Автор замечает, что введенные им регулярные точки границы (часть II) совпадают с точками устойчивости границы в смысле Келдыша—Лаврентьева. Д. П. Мильман

1267. Несобственные интегралы в n-мерном пространстве. Мышкис А. Д., Вигант Э. И., Лепин А. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда I, М., АН СССР, 1956, 91—92

1268. К одному обобщению интеграла Стилтьеса Столяров Н. А., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 652—655

В работах Хана (Hahn H., Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 1925, **134**, 449) и референта (Докл. АН СССР, 1934, **4**, 417) было рассмотрено следующее обобщение интеграла Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx} = \lim \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\left[\frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right] \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b).$$

В реферируемой заметке устанавливаются некоторые дальнейшие теоремы о таких интегралах.

Теорема 1. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют односторонние производные в точках a и b, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx} = f(b)\varphi'(b-0) - f(a)\varphi'(a+0) - f'(b-0)\varphi(b) + f'(a+0)\varphi(a) + \int_a^b \varphi(x)\frac{d^2 f(x)}{dx},$$

причем существование одного из написанных интегралов влечет существование другого.

В теореме 2, используя теорему 1 и одно из предложений референта, автор устанавливает существование ин-

теграла, когда $f''(x)$ существует и непрерывна, а $\varphi(x)$ интегрируема (R).

В теореме 3 при условиях, аналогичных условиям теоремы 1, устанавливается, что существование данного интеграла следует из существования интеграла Хеллингера $\int_a^b \frac{df(x)\,d\varphi(x)}{dx}$. Л. В. Канторович

1269. Об интегрировании Стилтьеса. **Мак-Шейн** (On Stieltjes integration. McShane E. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 69—74 (англ.)

На многомерные интегралы Стилтьеса распространяются две теоремы, ранее доказанные для одномерных интегралов. Метод доказательства для одного измерения не переносится на многомерный случай.

Вводится понятие видоизмененного интеграла Стилтьеса. Пусть f—ограниченная вещественнозначная функция, определенная на множестве D, лежащем в пространстве R^n, g — вещественнозначная функция в R^n. Для каждого интервала $I \subset R^n$ определяется обычным образом $\Delta_g I$ как сумма 2^n членов, каждый из которых равен $\pm$ значению g в вершинах I. Если B — замкнутый интервал, содержащийся в D, то будем называть расширенным подразделением B множество $P = \{I_1, I_2, \ldots, I_k, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, где I_j — неперекрывающиеся замкнутые интервалы, сумма которых содержит B, и для каждого j x_j — точка в $D \cap I_j$. P называется ограниченным подразделением B, если оно является расширенным подразделением и $\bigcup I_j = B$. Для каждого расширенного подразделения P определяется

$$S(P) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\,\Delta_g(I_j \cap B).$$

Предел $S(P)$ при стремлении наибольшего диаметра I_j к нулю называется видоизмененным интегралом Стилтьеса функции f относительно g по B и обозначается $\int_B f(x)\,dg(x)$.

Предел $S(P)$ при ограниченном подразделении называется обыкновенным интегралом Стилтьеса f относительно g по B.

Функция интервала Δ_g называется непрерывной в точке x, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого замкнутого интервала диаметра меньше δ, содержащего x, будет $|\Delta_g I| < \varepsilon$.

Доказывается:

1. Если видоизмененный интеграл $\int_B f(x)\,dg(x)$ существует и x_0 — точка, в которой $f = (f(x) : x \in D)$ имеет разрыв, то функция интервала $(\Delta_g(I \cap B) : I$ — интервал) непрерывна в x_0.

2. Пусть f — ограниченная функция в области D, лежащей в R^n, g — функция в R^n, имеющая ограниченное изменение в замкнутом интервале $B \subset D$, и t — такая функция в R^n, что $\Delta_t I$ равняется полному изменению Δ_g на I (I — любой замкнутый интервал $I \subset B$). Тогда из существования видоизмененного интеграла Стилтьеса $\int_B f(x)\,dg(x)$ следует существование интеграла $\int_B f(x)\,dt(x)$.

Эти теоремы справедливы и для обыкновенного интеграла Стилтьеса от функции $f(x)$, определенной лишь на B. Н. А. Столяров

1270. Об оценке функций распределения. **Блум** (A note on estimating distribution functions. Blum J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 953—957 (англ.)

Пусть заданы на конечном отрезке $[-A, A]$ функция ограниченной вариации $F(y)$ и последовательность непрерывных функций $\{f_n(y)\}$. Доказывается, что:

а) для того чтобы $F(y)$ однозначно определялась числами

$$a_n = \int_{-A}^{A} f_n(y)\,dF(y),\ n = 1, 2 \ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(y)\}$ была фундаментальной в пространстве $C[-A, A]$;

б) в точках непрерывности $F(y) = \lim_n F_n(y)$, где $F_n(y) = \Sigma_{y_j \leqslant y} H_j^{(n)}$, а $H_j^{(n)}$ определяются из системы неравенств:

1) $H_j^{(n)} \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n$; 2) $\Sigma_{j=1}^n H_j^{(n)} = 1$;

3) $\sum_{j=1}^n M_{ij}^{(n)} H_j^{(n)} \geqslant a_i,\ i = 1, \ldots, n$;

4) $\sum_{j=1}^n m_{ij}^{(n)} H_j^{(n)} \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, n$,

где

$$m_{ij}^{(n)} = \min_{y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j} f_i(y),\ M_{ij}^{(n)} = \max_{y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j} f_i(y),$$

$-A = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} \leqslant y_n = A$. В. И. Соболев

1271. Обобщение теоремы П. И. Романовского о сингулярных интегралах. **Натансон И. П.**, Науч. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1956, № 23, 114—117

Доказывается, что если положительное ядро $\Phi_n(t, x)$ $(a \leqslant t \leqslant b,\ a < x < b)$ при закрепленных n и x возрастает на $[a, x]$ и убывает на $[x, b]$ и для ограниченной функции $F(t)$ при некотором x существуют $F'(x)$ и интегралы Стилтьеса $J_n = \int_a^b \Phi_n(t, x)\,dF(t)$, то $\lim_{n\to\infty} J_n = F'(x)$. В частности, когда $F(t)$ абсолютно непрерывна, получается теорема, доказанная референтом. П. И. Романовский

1272. Обобщение теоремы П. И. Романовского о сингулярных интегралах на случай интегралов Стилтьеса. **Натансон И. П.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 92

См. реф. 1271.

1273. К теории многомерного интеграла. **Картак** (K theorii vícerozměrného integrálu. Kartá k Karel), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 400—414 (чеш.; рез. русс., нем.)

Изучается многомерный интеграл Перрона. Доказывается основная теорема: Пусть Q — двумерный интервал, $a \in Q$, f — функция на Q. Пусть при каждом интервале I таком, что $a \in \operatorname{Int} I$, существует интеграл Перрона функции f, распространенный на $Q - I$, причем существует

$$\lim_{I \to a} \int_{Q-I} f(x, y)\,dx\,dy = A \quad (a \in \operatorname{Int} I).$$

Тогда существует интеграл Перрона функции f, распространенный на Q, и он равняется A.

Даются некоторые приложения этой теоремы (интеграл произведения; геометрическое значение интеграла Перрона и др.). Б. А. Рымаренко

1274. Об одном случае распространения критерия компактности Арцела. **Николеску** (Asupra unei extensiuni a criteriului de compacitate a lui Arzelà. Nicolescu Lilly-Jeanne), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 3, 545—552 (рум.; рез. русс.)

Функция $f(x, y)$, определенная в единичном квадрате I: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, называется гиперболически непрерывной в точке $(x, y) \in I$, если для любого $\varepsilon > 0$

существует $\delta = \delta(\varepsilon, x, y) > 0$ такое, что

$$|\Delta_2 f| = |f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)| < \varepsilon$$

при всех h и k, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, $|k| < \delta$. Две функции f и g называются гиперболически эквивалентными, если их разность представима в виде суммы функции, зависящей только от x, и функции, зависящей только от y, т. е. если указанная разность гиперболически постоянна: $\Delta_2(f-g) = 0$.

Изучается пространство C_H, получаемое отождествлением гиперболически эквивалентных функций и введением нормы по формуле

$$\|f\| = \sup_{(x,y)\in I} |f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y)|.$$

(Это определение нуждается, по-видимому, в некотором уточнении (например, путем введения определенной нормировки рассматриваемых функций), ибо две функции, равные различным постоянным, являются гиперболически эквивалентными функциями, но вместе с тем имеют в смысле этого определения. очевидно, различные нормы. *Реф.*)

Доказывается, что пространство C_H есть полное пространство и что элементы любой его компактной части E являются функциями, равностепенно гиперболически непрерывными в I.

Если $E \subset C_H$ и для любой функции $f \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют функции D_f и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$|\Delta_2 f/(hk) - Df| < \varepsilon$$

в I при $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, то семейство функций E называется равностепенно гиперболически дифференцируемым семейством. Доказывается, что любое ограниченное, равностепенно гиперболически непрерывное и равностепенно гиперболически дифференцируемое семейство функций из пространства C_H является компактным. Л. Д. Кудрявцев

1275. Дифференцируемые отображения и порядок связности. Родиянский А. М., Матем. сб., 1955, **37**, № 1, 69—82

Пусть G — непустое открытое множество в евклидовом пространстве R^n, f — непрерывно дифференцируемое отображение G в R^n, множество G_0 нулей якобиана $J(x)$ отображения f не имеет внутренних точек, $J(x) \geqslant 0$ (или $J(x) \leqslant 0$) на G. Через S^n обозначается пространство, получающееся естественным дополнением R^n одной точкой до компакта.

Для всякого компакта $\Phi \subset R^n$ порядком связности $\pi(\Phi)$ называется уменьшенное на единицу число компонент множества $R^n \setminus \Phi$. Компакт Φ называется разбивающим R^n, если $\pi(\Phi) \geqslant 1$. Компакт $\Phi \subset G$ называется регулярно разбивающим множество G, если существует ограниченная компонента множества $R^n \setminus \Phi$, содержащаяся в G. Число компонент границы множества G в пространстве S^n обозначается $\pi(G)$ и называется порядком связности открытого множества G.

Доказываются, например, теоремы: пусть $\Phi \subset G$ — компакт, не имеющий внутренних точек, тогда если Φ регулярно разбивает G, то его образ $f\Phi$ разбивает R^n; если $\pi(\Phi) \geqslant \pi(G)$, то $f\Phi$ разбивает R^n; если $\pi(G) = 1$, а Φ разбивает R^n, то $f\Phi$ также разбивает R^n; если число компонент $R^n \setminus \Phi$ бесконечно, то и число компонент множества $R^n \setminus f\Phi$ бесконечно; если $A \subset G$ — множество типа F_σ и не содержит внутренних точек, то его образ fA также не содержит внутренних точек.

Изучаются некоторые свойства порядка связности открытых множеств для рассматриваемых отображений, а также области однолистности (последнее делается в случае $n = 2$). Л. Д. Кудрявцев

1276. Об особенностях отображений евклидовых пространств. I. Отображения с плоскости на плоскость. Уитни (On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Whitney Hassler), Ann. Math., 1955, **62**, № 3, 374—410 (англ.)

Для отображения f открытого множества евклидова пространства E^n в E^m дается определение производной $\nabla_V f$ этого отображения по данному вектору V пространства E^n, не зависящее от выбора системы координат. Изучаются дифференцируемые отображения плоских областей $G \subseteq E^2$ в E^2. Точка $p \in G$ называется регулярной для рассматриваемого отображения f, если $\nabla_V f(p) \neq 0$ при всех $V \neq 0$, и особой — в противном случае. Дважды непрерывно дифференцируемое отображение называется «хорошим» (good mapping), если в каждой точке $p \in G$ либо якобиан $J(p)$ этого отображения не равен нулю, либо $J_x^2(p) + J_y^2(p) \neq 0$. Для хорошего отображения множество всех особых точек C, называемое общей складкой, в окрестности каждой своей точки является гладкой кривой. Если $p \in C$ и τ — касательный к C вектор в точке p, то p называется складчатой точкой, если $\nabla_\tau f(p) \neq 0$, и угловой (casp) точкой, если $\nabla_\tau f(p) = 0$, $\nabla_\tau \nabla_\tau f(p) \neq 0$. Если каждая особая точка отображения f является либо складчатой, либо угловой точкой, то f называется правильным (excellent) отображением. У правильных отображений угловые точки изолированы. Доказывается, что любое непрерывное отображение f может быть сколь угодно точно аппроксимировано правильным отображением, причем в случае, если f r раз непрерывно дифференцируемо, то указанное правильное отображение может быть выбрано таким образом, что все его частные производные будут аппроксимировать соответствующие производные исходного отображения f с заданной наперед точностью. Показывается, что достаточно гладким отображениям в окрестности особой точки p соответствующим выбором системы криволинейных координат можно придать вид $u = x^2$, $v = y$ в случае складчатой точки p и вид $u = xy - x^3$, $v = y$ в случае угловой точки. В последней части статьи изучается связь складчатых и угловых точек у достаточно близких отображений, а также у отображений, для которых одновременно близки производные до некоторого порядка. В частности, дается формула подсчета числа угловых точек отображения. Л. Д. Кудрявцев

1277. Некоторые свойства покрытий. Пуччи (Alcune proprietà degli involucri. Pucci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 3, 294—298 (итал.)

Пусть X — множество в евклидовом пространстве E_n. Назовем покрытием множества X множество $X_\rho (\rho > 0)$, состоящее из точек E_n, расстояние которых от X меньше ρ. Через $\mathscr{F} X_\rho$ обозначим границу ρ-покрытия X_ρ.

Показывается, что для почти всех положительных ρ множество $\mathscr{F} X_\rho$ двумерно измеримо в смысле Минковского (РЖМат, 1956, 2864) и $\mu \mathscr{F} X_\rho = f'(\rho)$, где $f(\rho) = \operatorname{mes} X_\rho$ — двумерная мера Лебега. Отсюда выводятся новые выражения для меры Лебега множества X. Например, если множество $X \subset E_n$ ограничено и $\operatorname{mes} \mathscr{F} X = 0$, то

$$\operatorname{mes} X = \int_{-r(X)}^{0} \mu \mathscr{F}(X_\rho)\, d\rho$$

где $r(X)$ обозначает нижнюю грань тех ρ, для которых X_ρ не пусто. Р. С. Гутер

1278. Площадь Лебега и мера Хаусдорфа. Микл (Lebesgue area and Hausdorff measure. Mickle Earl J.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 2, 205—218 (англ.)

Рассматривается непрерывное отображение T единичного квадрата Q плоскости u, v, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ в евклидово трехмерное пространство S_3, т. е. параметрически заданная поверхность

$$T: x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in Q.$$

Строятся функции кратности, интегрирование которых по подходящей мере дает площадь поверхности.

Если $x \in S_3$ и $T^{-1}(x)$ не пусто, то компонента множества $T^{-1}(x)$ есть континуум, который называется максимальным континуальным прообразом x при отображении T. Для множества $E \subset Q$ функция $N^*(x, T, E)$ означает число максимальных континуальных прообразов x при отображении T, которые пересекаются с E. Тогда

$$A_H^*(T) = \int N^*(x, T, Q)\, dH^2,$$

где H^2 — двумерная мера Хаусдорфа, а $A_H^*(T)$ — площадь поверхности по Хаусдорфу.

Доказывается, что если $K(x, T, B_0)$ — число существенных максимальных континуальных прообразов (определение см. Radó T., Length and area, Amer. Math. Colloq. Publ., 1948, 30), пересекающихся с множеством $B_0 \subset Q$, то $A(T) = \int K(x, T, Q)\, dH^2$, где $A(T)$ — лебегова площадь поверхности, причем мера Хаусдорфа H^2 понимается в модифицированном смысле. Р. С. Гутер

1279. О функциях кратности, связанных с площадью Лебега. Радо (On multiplicity functions associated with Lebesgue area. Radó Tibor), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 2, 219—236 (англ.)

Строятся различные функции кратности, аналогичные построенной Миклом (реф 1278), интегрирование которых по мере Хаусдорфа дает лебегову площадь поверхности. Р. С. Гутер

1280. О структуре множеств уровня функций двух переменных. Маркус (Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions de deux variables. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 19, 2273—2275 (франц.)

Краткое изложение результатов автора, опубликованных ранее (РЖМат, 1956, 6499). Р. С. Гутер

1281. О понятии частичной непрерывности функций. Ариньш Э. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, Т. I, М., АН СССР, 1956, 75

1282. Задача представления. Блэкуэлл (A representation problem. Blackwell David), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 283—287 (англ.)

Пусть $c_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ и $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность характеристических функций подмножеств отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеющих данную положительную меру Лебега $a < 1$. Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на $[0, 1]$, допускала представление

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in [0, 1]$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{a} \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Доказательство этого предложения проводится применительно к более общей формулировке, в которой вместо отрезка $[0, 1]$ рассматривается некоторое пространство X с конечной мерой, определенной на борелевской системе подмножеств.

Автор обращает внимание на задачу об условиях, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, допускающая представление (1), где $\varphi_n(x)$ — характеристические функции интервалов длины a или конечных сумм интервалов. А. Ф. Тиман

1283. Некоторые свойства ортогональных функций. Гагаев Б. М, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 77

1284. Заметка об одном свойстве P_p-равномерно суммируемых функций. Кованько А. С., Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, 1955, № 6, ч. 2, 74—78

Рассматривается функциональное пространство с метрикой

$$D_{PP}^{E}(f, \varphi) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{E(-T, T)} | f(x) - \varphi(x) |^p dx \right\}^{1/p} \quad (p \geqslant 1).$$

Пусть

$$\overline{\delta} E = \overline{\lim}_{T \to \infty} | E(-T, T) | / (2T).$$

Функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется B^p-равномерно суммируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что $D_{B^p}^{E}(f, 0) < \varepsilon$, когда $\overline{\delta} E < \eta$.

Из этого определения следует, что если $f(x)$ B^p-равномерно суммируема, то $D_{B^p}^{E}(f, 0) = 0$, когда $\overline{\delta} E = 0$.

Автор доказывает обратное, именно: Если $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает тем свойством, что $D_{B^p}^{E}(f, 0) = 0$, когда $\overline{\delta} E = 0$, то $f(x)$ есть B^p-равномерно суммируемая функция. Б. М. Левитан

1285 Д. О некоторых вопросах метрической теории функций. Церетели О. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. матем ин-т, Тбилиси, 1956

1286 Д. О множествах точек существования производных. Цодыкс В. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1956

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1287. Об операции перехода к пределу в смысле Бореля и Валле-Пуссена в теории абстрактных множеств. Вьола (Sull'operazione di passaggio a limite, secondo Borel e de la Vallée Poussin, nella teoria degli insiemi astratti. Viola Tullio), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 1, 55—65 (итал.)

Семейство $\{X\}$ абстрактных непустых множеств X называется группой, если для любых $X_1, X_2 \in \{X\}$ найдется множество $X_3 \in \{X\}$ такое, что $X_3 \subset X_1 X_2$. Пусть $\{X\}$ и $\{Y\}$ — заданные группы абстрактных множеств, а Γ — заданное абстрактное пространство. Положим

$$U = \sum_{X \in \{X\}} X, \quad V = \sum_{Y \in \{Y\}} Y.$$

Рассматриваются функции $E(x)$ $(x \in U)$ и $E(x, y)$ $(x \in U, y \in V)$, для которых семейство подмножеств пространства Γ является областью значений. Для каждого $X \in \{X\}$ положим

$$S(X) = \sum_{x \in X} E(x), \quad P(X) = \prod_{x \in X} E(x),$$

Верхние и нижние пределы функции $E(x)$ над группой $\{X\}$ определяются соответственно следующими фор-

мулами:

$$K'' = \lim''_{\{X\}} E(x) = \prod_{X \in \{X\}} S(X),$$
$$K' = \lim'_{\{X\}} E(x) = \sum_{X \in \{X\}} P(X).$$

Аналогично определяются следующие верхние и нижние пределы:

$$K''(y) = \lim''_{\{X\}} E(x, y),\ K'(y) = \lim'_{\{X\}} E(x, y)\ (y \in V);$$
$$H''(x) = \lim''_{\{Y\}} E(x, y),\ H'(x) = \lim'_{\{Y\}} E(x, y)\ (x \in U).$$

В работе для каждого из соотношений

$$\lim''_{\{Y\}} K''(y) \subseteq \lim'_{\{X\}} H'(x);$$
$$\lim_{\{Y\}} K'(y) = \lim_{\{Y\}} K''(y) = \lim_{\{X\}} H'(x) = \lim_{\{X\}} H''(x),$$
$$\lim_{\{Y\}} \lim_{\{X\}} E(x, y) = \lim_{\{X\}} \lim_{\{Y\}} E(x, y), \qquad (1)$$
$$\lim_{\{X\},\{Y\}} E(x, y) = E_0$$

найдены необходимые и достаточные условия их выполнимости; при этом в случае соотношения (1) предполагается существование пределов

$$\lim_{\{X\}} E(x, y)\ (y \in V) \text{ и } \lim_{\{Y\}} E(x, y)\ (x \in U).$$

Доказываются еще три теоремы аналогичного содержания. Ш. С. Пхакадзе

1288. Замечание о представлении частично упорядоченных множеств. Новотный (Bemerkung über die Darstellung teilweise geordneter Mengen. Novotny Miroslav), Spisy vyd. přírodověd. fakult. Masarykovy univ., 1955, № 9, 451—458 (нем.; рез. чеш., русс.)

Пусть G — непустое частично упорядоченное множество.

Множество $\mathfrak{F}$ последовательностей типа μ, состоящих из нулей и единиц, называется f-представлением типа μ множества G, если $\mathfrak{F}$ изоморфно G. (Имеется в виду, что множество $\mathfrak{F}$ частично упорядочено по следующему правилу: $\{x_\lambda\}_{\lambda<\mu} \leqslant \{y_\lambda\}_{\lambda<\mu}$, если $x_\lambda \leqslant y_\lambda$ для всех $\lambda < \mu$). Это представление называется приведенным, если множество $\mathfrak{F}$ таково, что для любой пары неравных порядковых чисел λ_1, λ_2, меньших μ, найдется последовательность $\{x_\lambda\}_{\lambda<\mu} \in \mathfrak{F}$, для которой $x_{\lambda_1} \neq x_{\lambda_2}$. Множество $\mathfrak{M}$ подмножеств некоторого множества M мощности $\mathfrak{m}$ называется m-представлением ранга $\mathfrak{m}$ множества G, если $\mathfrak{M}$ изоморфно G. (Имеется в виду, что множество $\mathfrak{M}$ частично упорядочено посредством операции включения). Это представление называется приведенным, если для каждой пары x, y неравных элементов множества M существует хотя бы одно множество $N \in \mathfrak{M}$, содержащее один и только один из элементов x, y. Порядковым базисом множества G называется система $\mathfrak{B}$ подмножеств частично упорядоченного множества G со следующими свойствами:

1) если $B \in \mathfrak{B}$, $x \in B$, $y \in G$, $y < x$, то $y \in B$;

2) если $x, y \in G$, $x \neq y$, то существует $B \in \mathfrak{B}$, содержащее один и только один из элементов x, y;

3) для каждой пары несравнимых элементов x, y множества G существуют такие множества B_1, B_2, принадлежащие $\mathfrak{B}$, что $x \in B_1 \cap (G \setminus B_2)$, $y \in B_2 \cap (G \setminus B_1)$.

Автором доказано ранее (РЖМат, 1954, 4388), что каждое частично упорядоченное множество мощности $\aleph_\nu$ имеет f-представление типа ω_ν. Известно также что любое упорядоченное множество мощности $\mathfrak{m}$ имеет m-представление ранга $\mathfrak{m}$ (Биркгоф Г. Теория структур, М., 1952, стр. 93, теорема 11).

В реферируемой работе доказывается (теорема 1) эквивалентность следующих трех утверждений: (A) существует приведенное f-представление множества G типа μ; (B) существует приведенное m-представление множества G ранга $\mathfrak{m}$; (C) существует порядковый базис множества G мощности $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} > 0$, μ — порядковое число мощности $\mathfrak{m}$).

Для случая, когда $\mathfrak{m}$ бесконечно, а G есть упорядоченное множество, доказывается (теорема 2), что эти утверждения эквивалентны также утверждению «Существует плотное в G подмножество мощности $\mathfrak{m}$».

В качестве следствия получается (в предположении, что G содержит по крайней мере 2 элемента) равенство наименьшей мощности типа f-представления множества G, наименьшего ранга m-представления множества G, наименьшей мощности порядкового базиса множества G, а также (для случая, когда G есть бесконечное упорядоченное множество) наименьшей мощности подмножества, плотного в G. Э. С. Орловский

1289. Множества, проявляющие странные свойства при изометрии. I. Мыцельский (About sets with strange isometrical properties (I). Mycielski Jan), Fundam. math., 1955, 42, № 1, 1—10 (англ.)

Пусть $E_1 \simeq E_2$, где E_1 и E_2 — подмножества трехмерного евклидова пространства, обозначает соотношение конгруэнтности посредством поворота вокруг неподвижной (определенной) точки O пространства. В реферируемой работе исследуются различные вопросы относительно возможности этого соотношения между множеством (бесконечным) и его подмножеством. Автор получает следующие результаты:

1. Для каждого множества P трехмерного евклидова пространства, которое можно покрыть семейством прямых мощности меньшей $2^{\aleph_0}$, имеющих общую точку O, причем $O \notin P$, и для каждого семейства F подмножеств P, мощность которого не превышает $2^{\aleph_0}$, существует множество E такое, что $P \subset E$, $e = \aleph_0\ PF$ и $E - Q \simeq E$ для каждого $Q \in F$ (причем изометрия, переводящая $E - Q$ в E, является поворотом вокруг точки O).

Если P ограничено или лежит на сфере с центром в O, то E тоже соответственно ограничено или лежит на сфере с центром в O.

2. На сфере с центром в O существует множество E мощности $2^{\aleph_0}$ такое, что для каждого не более чем счетного множества D $E - D \simeq E$.

Теоремы 1 и 2 дают в случае трехмерного евклидова пространства ответ на один вопрос Серпинского.

3. На сфере в трехмерном евклидовом пространстве с центром в O для каждой бесконечной, не превосходящей континуума мощности $\mathfrak{m}$, существует множество E мощности $\mathfrak{m}$ такое, что $E - F \simeq E$ для каждого конечного множества F. В случае $\mathfrak{m} = \aleph_0$ доказательство теоремы 3 можно провести эффективно. H. Fast

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1290. Равномерная сходимость рядов Фурье. V. Cato (Uniform convergence of Fourier series. V. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 9, 600—605 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Салема (РЖМат, 1955, 4341, теорема I) и затем показывается, что если в ее условии (1) заменить $\lg h^{-1}$ на $(\lg h^{-1})^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, добавив требование, чтобы коэффициенты Фурье от $t(x)$ были порядка $O(e^{(\lg n)^\alpha} n^{-1})$, то утверждение 3) тес-

ремы сохраняет силу. Доказывается также (без изменения условий, наложенных Салемом), что в утверждение 1) можно внести уточнение, указав, что всякая точка Лебега будет точкой сходимости ряда Фурье от $f(x)$.

Указывается следующее обобщение теоремы Сато (РЖМат, 1955, 4340): Если $f(x)$ непрерывна,

$$h^{-1}\int_0^h [f(x+t)-f(x-t)]\,dt = o(1/\psi(h^{-1})) \qquad (h\to 0)$$

и $f(x)$ принадлежит классу $\varphi(n)$, то ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно при условии: $\varphi(n)=O(n)$ и $\psi(n)=\lg(n\theta(n)/\varphi(n))$, где $\theta(n)$, монотонно возрастая, стремится к ∞ при $n\to\infty$.

Дано еще несколько теорем в том же направлении.

Примечание референта. Доказательство части 3) теоремы I (РЖМат, 1955, 4341) прямыми методами (т. е. не прибегая к теории приближения функций полиномами) было дано В. И. Черейской. Ее работа сдана в печать в марте 1954 г. и в настоящее время опубликована в т. VIII Уч. зап. МГУ (Математика), стр. 159—163. Н. К. Бари

1291. Замечания и опечатки к статье «Равномерная сходимость некоторых тригонометрических рядов». Хирокава (Remarks and errata on the paper «Uniform convergence of some trigonometrical series», this journal, vol. 6 (1954), 162—173. Hirokawa Hiroshi), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 297—298 (англ.)

Отмечается, что теорема 5 в указанной выше статье (РЖМат, 1956, 6508) сформулирована неточно. Дается иная формулировка этой теоремы. Приводится большой список опечаток к той же статье. П. Л. Ульянов

1292. Абсолютная сходимость рядов Фурье. Идзуми, Цутикура (Absolute convergence of Fourier expansions. Izumi Shin-ichi, Tsuchikura Tamotsu), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 243—251 (англ.)

Рассматриваются функции $f(x)$ периода π, причем $f(0)=f(\pi)=0$. Устанавливается:

Теорема 1. Если $f(x)=\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ и $\Sigma_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$, то косинус-ряд для $f(x)$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nx \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

не обязан сходиться абсолютно.

Этот результат примыкает к теореме Винера, утверждающей, что если каждой точке $x_0\in[0,2\pi]$ соответствует некоторая окрестность I_{x_0} этой точки, в которой $f(x)$ совпадает с функцией, обладающей абсолютно сходящимся рядом Фурье, то и ряд Фурье функции $f(x)$ сходится абсолютно. Из теоремы 1 вытекает, что если имеется хотя бы одна точка x_0, для которой не существует окрестности вида I_{x_0}, то ряд Фурье функции $f(x)$ может и не сходиться абсолютно.

Кроме того, указываются некоторые достаточные условия, при выполнении которых абсолютная сходимость синус-ряда для $f(x)$ влечет абсолютную сходимость косинус-ряда и наоборот. На стр. 244, строка 4 снизу, вместо $[2(k-1)/3]$ должно быть m_k, где m_k — ближайшее целое число к $2(k-1)/3$. И. М. Ганзбург

1293. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (Третье сообщение). Стечкин С. Б., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 3, 385—412

Обобщается ряд теорем Сидона об абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами. В конце работы дается обобщение некоторых теорем автора, относящихся к приближению непрерывных функций, ряды Фурье которых имеют лакуны.

Последовательность целых чисел n_k $(k=1,2,\ldots)$ называется лакунарной, если найдется такое $\lambda>1$, что $n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda$ для всех k. Обозначим через Λ_σ множество всех тех последовательностей, каждую из которых можно разбить на конечное число лакунарных.

По определению, последовательность возрастающих целых чисел n_k $(k=1,2,\ldots)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}$, если существует такое конечное $A\geqslant 1$, для которого $P_s\leqslant A^s$ $(s=1,2,\ldots)$, где $P_s=\sup_n P_s(n)$, а $P_s(n)$ — число различных представлений n в виде $\Sigma_{j=1}^{s}\varepsilon_j n_{k_j}$ $(\varepsilon_j=\pm 1,\ 0<k_1<\ldots<k_s)$.

Последовательность $\{n_k\}\in\mathfrak{R}_\sigma$, если ее можно разбить на конечное число последовательностей типа $\mathfrak{R}$. Автор показывает, что $\mathfrak{R}_\sigma\neq\Lambda_\sigma$, но $\mathfrak{R}_\sigma\supset\Lambda_\sigma$. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)\in L(0,2\pi)$ имеет ряд Фурье

$$a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x+b_{n_k}\sin n_k x). \qquad (1)$$

Тогда, если $N=\{n_k\}\in\mathfrak{R}_\sigma$ и $f(x)$ ограничена сверху на $[0,2\pi]$, то $\Sigma_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|+|b_{n_k}|<\infty$.

Теорема 4. Пусть непрерывная 2π-периодическая функция f имеет ряд Фурье (1). Тогда, если $N=\{n_k\}\in\Lambda_\sigma$, то для всех целых n

$$R_n(f)\leqslant CE_n(f),$$

где константа C зависит лишь от последовательности N, а $R_n(f)$ — приближение в метрике C функции f n-й суммой Фурье и $E_n(f)$ — наилучшее приближение f в метрике C тригонометрическими полиномами порядка n.

Опечатка: на стр. 399, строка 8 снизу, напечатано $1-\eta$ вместо $-1-\eta$. П. Л. Ульянов

1294. Об абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами. Стечкин С. Б., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 230

Формулируется теорема, отличающаяся от теоремы 1 работы автора (реф. 1293) тем, что $f(x)$ предполагается ограниченной.

1295. О чезаровской суммируемости рядов Фурье. II. Кинукава (On the Cesàro summability of Fourier series. II. Kinukawa Masakiti), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 252—264 (англ.)

Пусть $f(t)$ — интегрируемая функция периода 2π, s — некоторое число, $\Delta>1$, $\rho>-1$, $0<\beta\leqslant\gamma$, $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s$, $\varphi_\beta(t)$ — интеграл порядка β от функции $\varphi(t)$.

$$\Delta_u^{(m)}\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m+\nu}\binom{m}{\nu}\varphi(t+\nu u)$$

и

$$\varphi_\beta(t)=o(t^\gamma). \qquad (1)$$

При $\gamma=\Delta\beta-\dfrac{\rho(\beta+1)(\Delta-1)}{1+\rho}$ условие

$$\int_0^t|d\{u^\Delta\varphi(u)\}|=O(t) \qquad (2)$$

вместе с (1) достаточно для (C,ρ)-суммируемости ряда Фурье функции $f(t)$ в точке $t=x$ к значению s. Если $\gamma=\Delta\beta-\rho(\Delta-1)$ и $-1<\rho\leqslant 0$ (соответственно $1>\rho\geqslant 0$), то условие (2) может быть заменено условием

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{u\to 0}}\int_{(ku)^{1/\Delta}}^{\pi}t^{-(1+\rho)}|\Delta_u^{(m)}\varphi(t)|\,dt=0.$$

(соответственно условием

$$\lim_{u\to 0} u^{\rho}\int_{u^{1/\Delta}}^{\pi} t^{-(1+\rho)}\,|\,\Delta_u^{(m)}\varphi(t)\,|\,dt = 0).$$

Эти результаты примыкают к прежним исследованиям автора (РЖМат, 1956, 2106), Гергена (Gergen J., Quart. J. Math., 1930, **1**, 252—275), Идзуми и Суноути (см., например, РЖМат, 1955, 4962.) А. Ф. Тиман

1296. Поправка. Суноути (Errata. Cesàro summability of Fourier series, this journal, vol. 5 (1953), 193—210. Sunouchi Gen-ichiro), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 147 (англ.)

К РЖМат, 1955, 5722.

1297. Об абсолютной логарифмической суммируемости ряда Фурье и продифференцированного ряда. Моханти, Мохапатра (On the absolute logarithmic summability of a Fourier series and its differentiated series. Mohanty R., Mohapatra S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 2, 254—259 (англ.)

Под суммируемостью $|R, \log w, r|$ ряда Σa_n подразумевается конечность интеграла

$$\int_A^{\infty}\left|\frac{r}{w(\log w)^{r+1}}\sum_{n<w}\log n\left(\log\frac{w}{n}\right)^{r-1}a_n\right|dw$$

при некотором $A>0$. Доказываются теоремы:

А. Если функция

$$\varphi_1(t) = (\log k/t)^{-1}\int_t^{\pi}\varphi(u)u^{-1}/du$$

(k — постоянная, большая чем π; $\varphi(u) = [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]/2$) имеет ограниченную вариацию на $(0, \pi)$, то ряд Фурье функции $f(t)$ суммируется $|R, \log w, 2|$ в точке x.

В. Если функция

$$\psi_1(t) = (\log k/t)^{-1}\int_t^{\pi}[f(x+u)-f(x-u)]/(2u^2)\,du$$

имеет ограниченную вариацию на $(0, \pi)$, то продифференцированный ряд Фурье функции $f(t)$ суммируется $|R, \log w, 2|$ в точке x.

Из теоремы А вытекает следствие

А′. Если

$$\int_0^{\delta}|\varphi(u)|/[u\log(k/u)]\,du<\infty,$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ суммируется $|R, \log w, 2|$ в точке x. А. А. Шнейдер

1298. Об абсолютной логарифмической суммируемости ряда Фурье. Моханти, Мохапатра (On the absolute logarithmic summability of a Fourier series. Mohanty R., Mohapatra S.), Math. Z., 1956, **65**, № 2, 207—213 (англ.)

Приведенная в работе тех же авторов (реф. 1297) теорема А обобщена на суммируемость $|R, \log w, r|$, где $r>1$. А. А. Шнейдер

1299. О сильной суммируемости рядов Фурье. Кинукава (Some strong summability of Fourier series. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 86—89 (англ.)

Рассматриваются вопросы сильной сходимости почти всюду рядов Фурье. По типу результаты автора непосредственно примыкают к результатам Идзуми (РЖМат, 1957, 304, 1300). Сформулируем характерный результат:

Теорема 1. Если $f(x)\in L^p(0, 2\pi)$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x)-s_n(x)|^k$$

(где $s_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$) сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$ как только

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}[2^{n/\kappa}\omega_p(2^{-n})]^p<\infty,$$

где $2\geqslant p>k>1$, $\gamma>p/k-1$ и

$$\omega_p(t) = \sup_{|u|\leqslant t}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+u)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

П. Л. Ульянов

1300. О некоторых тригонометрических рядах. XIX. Идзуми (Some trigonometrical series. XIX. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 90—92 (англ.)

Рассматривается вопрос о сильной сходимости почти всюду рядов Фурье (см. аналогичного типа результаты в заметке автора (РЖМат, 1957, 304)). Доказывается

Теорема 2. Пусть функция $f(x)\in L(0, 2\pi)$ имеет ряд Фурье

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{ikx} \qquad (1)$$

с частными суммами $s_n(x)$. Если $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[0, 2\pi]$ и

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f'(x+t)-f'(x-t)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant A(\log t^{-1})^{-\beta}\quad(p>1,\ \beta>1),$$

где A — постоянная, то ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty}|f(x)-s_n(x)|$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. П. Л. Ульянов

1301. О некоторых тригонометрических рядах. XX. Идзуми (Some trigonometrical series. XX. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 2, 93—96 (англ.)

Рассматриваются частные случаи проблемы Човла (S. Chowla). Доказываются, например:

Теорема 1. Если K — любое фиксированное положительное число, то существует такое N, что для всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$$\min_{x\in[0,\,2\pi]}\sum_{i=1}^{n}\cos m_i x<-K,$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — множество различных целых чисел, которые удовлетворяют условию: число равенств

$$m_i+m_j=m_k\quad(i<j<k\leqslant n) \qquad (1)$$

имеет порядок $o(n^2)$ при $n\to\infty$.

Теорема 3. Формулируется аналогично теореме 1, лишь условие (1) заменяется следующим: число равенств

$$m_i\pm m_j = m_k\pm m_l\quad(i<j\leqslant n,\ k<l\leqslant n)$$

имеет порядок $o(n^3)$. П. Л. Ульянов

1302. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций. Соколов И. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 102

1303. О некоторых вопросах конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси. Тиман А. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 106

1304. О линейных процессах приближения периодических функций тригонометрическими полиномами. Тиман А. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 105—106

1305. О многочленах С. Н. Бернштейна для интегрируемых функций. Бронштейн С. М., Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1955, № 16, 131—133

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция на $[0, 1]$ и $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Тогда $\lim_{n\to\infty} [\int_0^x B_n(f, t)\,dt - B_n(F, x)] = 0$ равномерно относительно x из $[0, 1]$ ($B_n[f, t]$ — значение полинома Бернштейна функции $f(x)$ на $[0, 1]$ в точке t).

Примечание референта. Автор использует следующую теорему, отсылая к книге И. П. Натансона (Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949): Если $\psi(t)$ — непрерывная на $[0, x]$ $(0 < x \leqslant 1)$ функция, то

$$B_n(\psi, t) \to \psi(t)$$

равномерно относительно t из $[0, x]$. Такой теоремы в книге И. П. Натансона нет и она неверна. Но эта погрешность устранима. И. Г. Соколов

1306. О наилучших приближениях почти-периодических функций. Бредихина Е. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 77

1307. Проблема абсолютной сходимости ортогональных рядов. Стечкин С. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 103

1308. О коэффициентах Фурье—Данжуа. Джваршейшвили А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 123—124

Исследуется вопрос о существовании ортонормированной системы $\{\omega_k(x)\}$, по которой коэффициенты Фурье — Данжуа любой функции $f \in D$ были бы ограничены. Формулируется, в частности,

Теорема 2. Если $\{g_n(t)\}$ есть последовательность локально монотонных функций на $[a, b]$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_a^b \varphi(t)\, g_n(t)\,dt \right| < M$$

для каждой $\varphi \in L(a, b)$, то неравенства

$$\left| \int_a^b f(t)\, g_n(t)\,dt \right| \leqslant M(f) \quad (f \in D \text{ и } n = 1, 2, \ldots)$$

справедливы тогда и только тогда, когда $\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |g_n(t)| \leqslant C$, $V_a^b(g_n) \leqslant C$ для всех n.

Примечание референта. Используя теорему Хара (Haar A., Math. Z., 1929, 31, 128—137), из теоремы 2 заключаем, что не существует ортонормированной системы локально монотонных функций на $[a, b]$, ограниченных в совокупности, по которой коэффициенты Фурье — Данжуа любой функции $f \in D(a, b)$ были бы ограничены. П. Л. Ульянов

1309. Некоторые экстремальные задачи теории монотонных функций. Рымаренко Б. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 98—99

См. также: 1210, 1211, 1228, 1232, 1318, 1363, 1364, 1454, 1536, 1537, 1583, 1590, 1597, 1603, 1605—1608, 1808

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1310. Об одном аналоге теоремы Лиувилля. Балк М. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 75—76

1311. О достаточных условиях сверхсходимости. Ривлин (On sufficient conditions for overconvergence. Rivlin T. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 597—602 (англ.).

Рассматриваются степенные лакунарные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с радиусом сходимости, равным единице, т. е. ряды, у которых $a_n = 0$ для $m_k < n < n_k$ и

$$\overline{\lim} \frac{m_k - n_{k-1}}{n_{k-1}} = K > 0.$$

Записывая ряд в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{n_k - 1}\, p_k(z) \quad (n_0 = 0),$$

автор связывает плотность распределения нулей последовательности полиномов $p_k(z)$ со сверхсходимостью рассматриваемого ряда.

В первой части работы даются достаточные условия сходимости подпоследовательности $S_{m_k}(z)$, где

$$S_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n z^n$$

в окрестности точки $z = 1$.

Во второй части автор дает условия, при которых для любого действительного Φ из интервала $[0, 2\pi]$ существует «аргументальная» последовательность Φ_n, зависящая от Φ, такая, что

$$S^*_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n e^{i\Phi_n} z^n$$

сходится равномерно в

$$|e^{i\Phi} - z| < \delta,$$

где δ — некоторое положительное число.

Э. З. Шувалова

1312. О росте функций, имеющих полюсы или нули на положительной части действительной оси. Бранк (On the growth of functions having poles or zeros on the positive real axis. Brunk H. D.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 1—19 (англ).

Пусть Δ — область, содержащая положительную часть действительной оси, ограниченная сверху кривой $y = y^+(x)$, снизу—кривой $y = y^-(x)$. Функции $y^+(x)$, $y^-(x)$ непрерывны, ограничены при $x \geqslant a$ и удовлетворяют условию Липшица. Пусть Γ — граница Δ и γ_n — перемычки (уходящие с ростом n в бесконечность), соединяющие верхнюю границу Γ^+ с нижней границей Γ^-. Предполагается, что длины γ_n равномерно ограничены сверху. Рассматривается функция $f(z)$, аналитическая в Δ (непрерывная в $\overline{\Delta}$), за исключением точек λ_n: $\lambda_n > 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty$, в которых она, возможно, имеет полюсы порядка $\leqslant p$, где p — фиксированное число. Пусть $f(z) = O(e^{\alpha z})$ при больших $|z|$ на Γ и $|f(z)| < M_n$ на γ_n. Обозначим через $a_{n,-p}$ коэффициент при $(z - \lambda_n)^{-p}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана вокруг λ_n. Основной результат состоит в том, что при определенных условиях, наложенных на M_n, дается оценка $a_{n,-p}$. Рассматривается также случай, когда $f(z)$ в точках λ_n регулярна и имеет нули порядка $\geqslant p$. В этом случае, обозначая через $a_{n,p}$ коэффициент при $(z - \lambda_n)^p$ в ряде Тейлора $f(z)$ вокруг λ_n, дается оценка $a_{n,p}$. Отметим для примера следующий результат (другие результаты имеют аналогичный характер): Пусть γ_n лежит правее $x = \lambda_n$ и пусть $p(\sigma) = \sup_{n\geqslant 1}(\lambda_n\sigma - \ln M_n)$. Если при некотором η

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\eta\sigma}\,d\sigma = \infty, \qquad (1)$$

то тогда, каково бы ни было $\delta > 0$,

$$|a_{n,-p}| = o(\lambda_n^p \Lambda_n^p \exp[(\alpha + \delta + D)\lambda_n]),$$

$$\Lambda_n = \prod_{k \neq n} \left| \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2} \right|. \quad (2)$$

Идея доказательства заключается в следующем. Пусть для простоты $f(z)$ в λ_n имеет простые полюсы ($p = 1$) с вычетами $a_n = a_{n,-1}$. Рассматривается функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(t) e^{-zt}\, dt.$$

Из оценки $f(t)$ на Γ и перемычках γ_n следует

$$\left| F(s) - \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k s} \right| < KM_n e^{-\lambda_n \sigma}, \quad s = \sigma + it.$$

Отсюда, используя основную теорему Мандельбройта (РЖМат, 1956, 6553), автор выводит, в силу (1), искомую оценку (2). А. Ф. Леонтьев

1313. Последовательности аналитических функций и их нули. Генелиус (Sequences of analytic functions and their zeros. Ganelius Tord), Arkiv mat., 1954, **3**, № 1, 1—50 (англ.)

Имеются две проблемы, в известном смысле, взаимообратные: I. Исследовать распределение нулей равномерно сходящихся последовательностей аналитических функций, в частности полиномов. Пример — теорема Йенча (Титчмарш, Теория функций, М. — Л., 1951, стр. 270—274). II. Исследовать область равномерной сходимости последовательности аналитических функций, равномерно сходящейся в окрестности начала координат к функции, не тождественной нулю, по распределению нулей последовательности этих функций, в частности полиномов. Примеры — теоремы Лагерра, Линдворта и Пойа (реф. 1333).

В работе приводятся основные результаты, полученные в этих направлениях, а также дается обобщение некоторых результатов. Основное внимание уделено равномерному распределению нулей полиномов и экспоненциальных полиномов.

Пусть $\{P_\gamma(z)\}$ — последовательность полиномов и $P_\gamma(z)$ имеет степень n_γ, $\lim n_\gamma = \infty$. Обозначим через $N_\gamma(\alpha, \beta)$ число нулей $p_\gamma(z)$ в секторе $\alpha \leqslant \arg z < \beta$. Распределение нулей последовательности называется равномерным, если

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{N_\gamma(\alpha, \beta)}{n_\gamma} = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}$$

для всех α и β, удовлетворяющих условию: $0 < \beta - \alpha < 2\pi$.

Аналогично, в случае последовательности экспоненциальных полиномов $\{E_\gamma(z)\}$, где $E_\gamma(z) = \sum_\mu^{+\infty}{}_0 a_\mu^{(\gamma)} e^{\lambda_\mu^{(\gamma)} z}$, где $\lambda_\mu^{(\gamma)}$ — числа действительные неотрицательные, равномерное распределение в полюсе $B > \operatorname{Im}(z) > A$ определяется равенством

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{N_\gamma(\alpha, \beta)}{\lambda_\gamma} = \frac{\beta - \alpha}{2\pi},$$

где $N_\gamma(\alpha, \beta)$ — число нулей $E_\gamma(z)$ в полюсе $\beta > \operatorname{Im}(z) \geqslant \alpha$ при всех α и β, удовлетворяющих неравенству $B > \beta > \alpha > A$ и $\lambda_\gamma = \operatorname{Max}_\mu \lambda_\mu^{(\gamma)}$.

Дается необходимое и достаточное условие равномерного распределения нулей последовательности полиномов, из которых, в частности, применительно к отрезкам степенного ряда с конечным радиусом сходимости получается известный результат Сегё. Библ. 24 назв. Т. И. Краснощекова

1314. Последовательности полиномов с регулярным распределением нулей. Сарымсаков Т. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. I. М., АН СССР, 1956, 99

1315. О свойствах некоторых ортогональных рядов. Геронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 353—356

Рассматривается ортогональный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k P_k(z), \quad |z| < 1,$$

где $\{P_n(z)\}$ — система многочленов, ортонормальных на единичной окружности относительно обложения $d\sigma(\varphi)$, где $\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(\varphi)\, d\varphi > -\infty$. Автор отмечает, что ряд $f(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k P_k(z)$ при условии, что

$$\sum_{k=0}^\infty |b_k|^2 < \infty,$$

сходится абсолютно и равномерно внутри $|z| < 1$ и $f(z)$ имеет почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения.

Дается ряд теорем о поведении $\sum_{k=0}^\infty b_k P_k(z)$ на единичной окружности, аналогичные теоремам Абеля, Таубера и Фату-Рисса в теории степенных рядов.

Э. З. Шувалова

1316. О многочленах, ортогональных с дифференцируемым весом. Суетин П. К., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 5, 788—791.

Рассмотрена система многочленов $\{P_n(z)\}$, ортонормальных с весом $n(z) > 0$ на границе Γ некоторой ограниченной области G. Приведена теорема: Если Γ — правильная аналитическая кривая и если на Γ существует производная p-го порядка $n^{(p)}(z)$, принадлежащая классу $\operatorname{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то для всякого замкнутого множества $F \subset G$ существует такая константа $C(F)$, что справедливо неравенство

$$|P_n(z)| \leqslant \frac{C(F)}{n^{p+\alpha}}, \quad z \in F \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

если $\alpha = 1$, то показатель при n уменьшается на $\varepsilon > 0$.

Я. Л. Геронимус

1317. Об одном классе гильбертовых пространств аналитических функций. Фишман К. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда., 1. М., АН СССР, 1956, 109

1318. Замечание к одной теореме М. А. Лаврентьева. Суворов Г. Д., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 3—8

Пусть D — ограниченная односвязная область комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$. М. А. Лаврентьев (Докл. АН СССР, 1936, 4, 5) ввел относительное расстояние $\rho(z_1, z_2) = \min\{\inf$ дл $l'_{z_1 z_2}$, $\inf$ дл $l''_{z_1 z_2}\}$ ($z_1 \in D$, $z_2 \in D$), где $l'_{z_1 z_2}$ пробегает множество всех дуг, соединяющих z_1 и z_2 по D, а $l''_{z_1 z_2}$ — дуг, отделяющих z_1 и z_2 от $z = 0$. Далее понятие идеальной (обобщенной) граничной точки t определялось им как класс эквивалентных уходящих к границе D фундаментальных последовательностей; в полученное расширение области D расстояние вводилось обычным образом. Однако автор на примере показывает, что $\lim \rho(z, z_n)$ ($\{z_n\} \in t$) может не существовать. Правда, М. А. Лаврентьев сообщил автору, что если в расширенной области расстояние определить по формуле $\rho^*(t_1, t_2) =$

$=\inf \overline{\lim}\, \rho(z_{1n}, z_{2n})$ (inf берется по всем $\{z_{1n}\} \in t_1$, $\{z_{2n}\} \in t_2$), то все рассуждения сохраняют силу. Однако ρ^* не удовлетворяет аксиоме треугольника. Поэтому автор вводит новую метрику

$$\bar{\rho}(z_1, z_2) = \inf_{n;\, z', \partial D, \ldots, z_n' \partial D} [\rho(z_1, z_1') + \rho(z_1', z_2') + \\ + \cdots + \rho(z_n', z_2)], \qquad (1)$$

которая удовлетворяет аксиомам метрического пространства и соотношению $\bar{\rho}(z_1, z_2) = \inf_{z \partial D} [\rho(z_1, z_2) + \rho(z_1 z_2)]$ (для проверки этого автор убеждается сначала, что $\inf$ дл $l''_{z_1 z_2}$ удовлетворяет аксиоме треугольника, а затем, что в формуле (1) можно считать $n = 1$). В этой метрике рассуждения М. А. Лаврентьева также сохраняют силу. А. Д. Мышкис

1319. Использование неевклидовой метрики в изучении конформных отображений. Лелон-Ферран (Utilisation de métriques non euclidiennes dans l'étude des transformations conformes. Lelong Ferrand Jacqueline), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2. Amsterdam, 1954, 135—136 (франц.)

Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в $|z| < 1$. Введем на многообразии Σ, описываемом f, конформную метрику $d\sigma = e^{\lambda} |df|$, которая превращает Σ в поверхность R. Через $L(\rho, \theta)$ обозначим длину образа радиуса $\arg z = \theta$, $0 \leqslant z \leqslant \rho$. Тогда A — площадь R выразится как $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial \rho} \rho \, d\rho \, d\theta$. Пусть, наконец, K — риманова кривизна и $K^+ = \frac{1}{2}(K + |K|)$.

Автор сообщает следующий результат. Если A меньше ∞ и $\iint K^+ da < \infty$, где da — элемент площади в R, то $L(1, \theta)$ конечно для квази всех значений (т. е. за исключением множества внешней емкости ноль).

Далее автор сообщает о возможности обобщения ее результатов, полученных ранее (РЖМат, 1953, 292). П. П. Белинский

1320. Итерация отображения Жуковского и ее комплексы отрезков. Пратье (Iteration der Joukowski—Abbildung und ihre Streckenkomplexe. Pratje Ilse), Mitt. math. Semin. Giessen, 1954, № 48, 1—54 (нем.)

Изучается класс римановых поверхностей, на которые z-плоскость отображается функциями $w = F_n(z) = f_1(f_2(f_3 \cdots f_{n-1}(f_n(z))) \cdots)$, где $f_\nu(z) = (a_\nu / 2) \times [(z / b_\nu) + (z/b_\nu)^{-1}]$ — функции Жуковского с соответственно подобранными параметрами a_ν и b_ν, а также функциями, получаемыми из $F_n(z)$ предельным переходом при $n \to \infty$. Использование комплексов отрезков (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941, п. 244) делает структуру этих поверхностей очень наглядной. Указанный класс поверхностей оказывается довольно широким и включает в себя многие важные классы поверхностей. В частности, показано, что $\exp z$, $\sin z$, $\wp$-функция Вейерштрасса могут быть представлены как бесконечные итерации функций Жуковского.

В конце статьи показано, что полученные результаты можно рассматривать как обобщение результатов Кёбе (Koebe P., Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Leipzig, Math.-phys. Kl., 1937, 89, 173—204), при этом привлечение комплексов отрезков делает метод Кёбе более прозрачным. А. А. Гольдберг

1321. Геометрия и конформное отображение обобщенных круговых многоугольников. I. Ункельбах (Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. I. Unkelbach Helmut), Math. Ann., 1955, 129, № 5, 391—414 (нем.)

В работе обобщается понятие кругового многоугольника и изучается вопрос о конформном отображении полуплоскости на такой обобщенный многоугольник. Рассматриваемые автором круговые многоугольники представляют собой односвязные многолистные области, не содержащие точек разветвления внутри, границы которых состоят из конечного числа круговых дуг следующего вида: 1) конечных круговых дуг, т. е. односвязных открытых кривых, расположенных на конечном числе листов некоторой римановой поверхности над дугой окружности и не имеющих внутри точек разветвления; 2) бесконечных круговых дуг, т. е. множество точек римановой поверхности $\ln|z - z_1|$, расположенных над окружностью $|z - z_0| = c$, причем $|z_1 - z_0| < c$; 3) полубесконечных круговых дуг, т. е. одна из двух частей бесконечной круговой дуги, на которые она распадается простым разрезом.

К границе относятся также и изолированные точки.

Основной результат: функция $z = f(\zeta)$, отображающая верхнюю полуплоскость ζ-плоскости на обобщенный круговой многоугольник, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{z, \zeta\} \equiv \frac{2z'z''' - 3z''^2}{2z'^2} = R(\zeta),$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, все коэффициенты которой вещественны и все полюсы которой находятся в точках, соответствующих вершинам кругового многоугольника. Рассматриваются частные случаи, а также приводятся примеры. С. А. Гельфер

1322. Аэродинамические характеристики профилей, имеющих два излома. Муджа (Sull'aerodinamica dei profili a spezzata trilatera. Muggia Aldo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1952—1953, 87, № 1, 67—78 (итал.)

Методом конформных преобразований решается задача об обтекании бесконечно тонкого профиля с двумя изломами контура потоком идеальной несжимаемой жидкости. Рассматривается профиль, состоящий из трех плоских звеньев. Получены формулы для определения коэффициента подъемной силы и коэффициента продольного момента. Я. М. Серебрийский

1323. О методе параметрических представлений и вариационном методе Г. М. Голузина. Куфарев П. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1 М., АН СССР, 1956, 85—86

1324. О распространении вариационного метода Г. М. Голузина на двусвязные области. Куфарев П. П., Семухина Н. В., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 4, 505—507

Формулируются две теоремы, распространяющие известный в теории однолистных в круге функций метод Шиффера (Schiffer, Amer. J. Math., 1943, 65, 341—360) и Голузина (Матем. сб., 1946, 203, 10 (61) : 2; 1947, 83, 21 (63) : 1) на случай функций, однолистных в кольце.

Теорема 1. Пусть семейство ограниченных двусвязных областей $G(t)$, $t_0 - a < t < t_0 + a$, удовлетворяет следующим условиям: 1) граница $\Gamma(t)$ области $G(t)$ состоит из двух простых замкнутых кривых Жордана:

$$z = \Omega_k(\lambda, t), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi, \quad k = 1, 2;$$

2) функции $\Omega_k(\lambda, t)$ равномерно относительно λ дифференцируемы по t при $t = t_0$; 3) кривые $z = \Omega_k(\lambda, t_0)$ аналитические.

Пусть далее $w = F(z, t)$ — функция, конформно отображающая на $G(t)$ кольцо $r(t) < |w| < R(t)$ (где

$R(t)$ дифференцируема в точке t_0), для которой существует $\left.\frac{\partial \arg F(z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}$, и $z=\Phi(w,t)$ — функция, обратная $F(z,t)$.

При указанных условиях производная $\left.\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}$ существует и удовлетворяет соотношению

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=t_0} = w\frac{\partial \Phi(w,t_0)}{\partial w}\left\{-\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_{|\xi|=R_0}\left[\frac{d\ln R}{dt}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi\Phi'_\xi(\xi,t)}\frac{\partial\Omega_1(\lambda,t)}{\partial t}\right)\right]_{t=t_0}K\left(\frac{w}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}+\right.$$

$$+\frac{\omega}{\pi^2}\int\limits_{|\xi|=r_0}\left[\frac{d\ln r}{dt}-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi\Phi'_\xi(\xi,t)}\frac{\partial\Omega_2(\lambda,t)}{\partial t}\right)\right]_{t=t_0}\times$$

$$\left.\times K\left(\frac{w}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}+C-Di\right\}.$$

Здесь $R_0=R(t_0)$, $r_0=r(t_0)$; $F(\Omega_1(\lambda,t_0),t_0)=\xi$, $|\xi|=R_0$; $F(\Omega_2(\lambda,t_0),t_0)=\xi$, $|\xi|=r_0$;

$$C=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_0}\left[\frac{d\ln R}{dt}-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi\Phi'_\xi(\xi,t)}\frac{\partial\Omega_1(\lambda,t)}{\partial t}\right)\right]_{t=t_0}\frac{d\xi}{\xi},$$

$$K(x)=\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln x\right)-\frac{\zeta(\omega)}{\pi i}\ln x=$$

$$=-\frac{\pi i}{2\omega}\left(\frac{1+x}{1-x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1-q^{-2k}x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q^{2k}x}{1-q^{2k}x}\right),$$

$$q=\frac{r_0}{R_0};$$

вещественный и мнимый периоды 2ω, $2\omega'$ — функции Вейерштрасса $\zeta(u)$ связаны соотношением $\frac{\omega'}{i\omega}=\frac{1}{\pi}\ln q$; D — вещественное число. При этом

$$\left.\frac{d\ln\frac{R}{r}}{dt}\right|_{t=t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_0}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi\Phi'_\xi(\xi,t)}\frac{\partial\Omega_1(\lambda,t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\frac{d\xi}{\xi}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_0}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi\Phi'_\xi(\xi,t)}\frac{\partial\Omega_2(\lambda,t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\frac{d\xi}{\xi}.$$

Теорема 2. Пусть $f(w)$ голоморфна и однолистна в кольце $r_0<|w|<R_0$; $f(w)+tq_1(w)$ голоморфна и однолистна (при малых t) в кольце $R_0-\varepsilon_1\leqslant|w|<R_0$ и отображает его на область с граничными континуумами $\Gamma'(t)$ и $\Gamma_{R_0}(t)$; $f(w)+tq_2(w)$ голоморфна и однолистна в кольце $r_0<|w|\leqslant r_0+\varepsilon$ и отображает это кольцо на область, ограниченную континуумами $\Gamma_{r_0}(t)$ и $\Gamma''(t)$; $\Gamma_{r_0}(t)$ лежит внутри кривой $\Gamma''(t)$, $\Gamma''(t)$ — внутри $\Gamma'(t)$, $\Gamma_{R_0}(t)$ вне $\Gamma'(t)$; пусть далее $R(t)$ — функция, дифференцируемая в точке $t=0$, $R(0)=R_0$. Тогда функция $z=\Phi(w,t)$, конформно отображающая кольцо $Q(t): r(t)<|w|<R(t)$ на двусвязную область, граница которой состоит из континуумов $\Gamma_{r_0}(t)$ и $\Gamma_{R_0}(t)$, представима внутри $Q(t)$ в виде

$$\Phi=(w,t)=f(w)+twf'(w)P(w)+o(t), \qquad (1)$$

где $P(w)=\frac{\omega}{\pi^2}\lim\limits_{\rho\to R_0}\int\limits_{|\xi|=\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{q_1(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right)K\left(\frac{w}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}-$

$$-\frac{\omega}{\pi^2}\lim_{\rho\to r_0}\int\limits_{|\xi|=\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{q_2(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right)K\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}+E-$$

$$-iD-2\left.\frac{d\ln R}{dt}\right|_{t=t_0},$$

$$E=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to r_0}\int\limits_{|\xi|=\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{q_2(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

При этом

$$2\left.\frac{d\ln\frac{R}{r}}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to R_0}\int\limits_{|\xi|=\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{q_1(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right)\frac{d\xi}{\xi}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to r_0}\int\limits_{|\xi|=\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{q_2(\xi)}{\xi f'(\xi)}\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Вариационная формула (1) дает возможность получать качественные результаты при решении соответствующих экстремальных задач. И. Е. Базилевич

1325. О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов. Николаева Г. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 152—153

1326. Об одном дополнении к теореме о движении граничных точек. Положий Г. Н., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 3, 339—342

Теорема автора о движении граничных точек (Положий Г. Н., Успехи матем. наук, 1952, **7**, вып. 6(52)) дополняется на случай существования производной в. неподвижных граничных точках и читается теперь так:

При конформном отображении односвязной области G на произвольную область G^*, содержащую G и имеющую с G частично общую границу в виде некоторой жордановой кривой Γ, на открытой кривой Γ не может быть более трех неподвижных точек. Если таких точек имеется три, то две крайние из них — притягивающие, а средняя отталкивающая; если таких точек только две, то одна из них — притягивающая, другая не притягивающая. При этом, если производная в неподвижных точках существует, то она по модулю строго меньше единицы в притягивающих точках и строго больше единицы в средней отталкивающей точке.

И. Е. Базилевич

1327. О максимуме конформного радиуса фундаментальной области данной группы. Гельфер С. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 78.

1328. О граничном вращении многолистных односвязных областей. Паатеро (Über die Randdrehung der mehrblättrigen einfach zusammenhängenden Gebiete. Paatero V.), Suomalais tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 194, 7S. (нем.)

Если Γ — простая дуга кривой $\zeta=g(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ с касательной, направляющий угол которой есть кусочно-непрерывная функция $\Psi(t)$, то

$$\alpha=\int_{t_1}^{t_2}|d\Psi(t)| \qquad (1)$$

называется вращением Γ. Пусть G — однолистная односвязная область. Если граница Γ области G обладает вышеуказанным свойством, то (1) называется граничным вращением области G. В общем случае однолистной односвязной области граничное вращение ее определяется следующим образом. Пусть $T_1, T_2, \ldots$ — последовательность замкнутых областей, $T_n\subset T_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, исчерпывающих G. Пусть l_n — гладкая замкнутая кривая Жордана, лежащая в G и содержащая внутри T_n, и пусть α_n — нижняя граница вращения для всевозможных l_n. Последовательность α_n, очевидно, монотонно

возрастает. Граничное вращение G определяется как

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n. \qquad (2)$$

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, конформно отображающая круг $|z| < 1$ на G и

$$f(z) = u(z) + iv(z) = 1 + \frac{z\zeta''(z)}{\zeta'(z)}. \qquad (3)$$

Так как $|u(re^{i\varphi})|$ — субгармоническая функция, то существует

$$\bar{\alpha} = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| \, d\varphi \qquad (4)$$

и, как было доказано ранее, $\alpha = \bar{\alpha}$ (Paatero, Ann Sci., Fenicae, Serie A., 1931, 33, № 9).

Пусть теперь G — многолистная односвязная область, содержащая внутри конечное число точек ветвления. Пусть далее $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, отображающая круг $|z| < 1$ на G так, что $z = 0$ переходит в простую точку области G. И в этом случае, как доказывается в настоящей работе, существуют пределы (2), (4) и равны между собой. И. Е. Базилевич

1329. О симметричных однолистных областях с ограниченным граничным вращением. Т а м м и (Note on symmetric schlicht domains of bounded boundary rotation. T a m m i O l l i), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 198, 10 p. (англ.)

Рассматривается подкласс S_k^R однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z + \Sigma_{\nu=2}^{+\infty} a_\nu z^\nu$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющих уравнению

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \int_0^\pi \frac{1 - z^2}{1 - 2\cos\varphi \cdot z + z^2} \, d\Psi(\varphi),$$

где $\Psi(-\varphi) = \Psi(\varphi)$, $\int_0^\pi |d\Psi(\varphi)| = \frac{k}{2}$ и $\int_0^\pi d\Psi(\varphi) = 1$. Соответствующие им области имеют граничное вращение $k\pi$ (реф. 1328).

Доказывается точное неравенство $|a_4| \leqslant \frac{k^3 + 8k}{24}$ при условии $2 \leqslant k \leqslant 4$. Экстремальными функциями являются только функции

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon k} \left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon z}{1 - \varepsilon z} \right)^{k/2} - 1 \right\}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

И. Е. Базилевич

1330. О коэффициентах однолистных функций (II). Г у н Ш э н, (单叶函数的係數 II. 續昇) 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 115—125 (кит.; рез. англ.)

Ч. I. см. РЖМат., 1955, 3166.

Пусть $f_k(z) = z + \Sigma_{n=1}^{\infty} c_{nk+1}^{(k)} z^{nk+1}$ регулярна и однолистна в единичном круге $|z| < 1$. Основной целью этой статьи является получение следующего результата:

$$\left| c_{2n+1}^{(2)} \right| < \exp\{-(1-b)^2\} + o(1),$$

где $b = \left| c_3^{(2)} \right|$.

Таким образом, мы доказали, что если $n/m \to 1$, $n \to \infty$, тогда

$$\begin{aligned} \left| |c_{2n+1}^{(2)}| - |c_{2m+1}^{(2)}| \right| &= o(1), \\ \left| |c_n| - |c_m| \right| &= o(n^{4/5} \ln^{7/10} n), \\ \left| |c_{3n+1}^{(3)}| - |c_{3m+1}^{(3)}| \right| &= o(n^{-3/5}), \\ \left| |c_{kn+1}^{(k)}| - |c_{kn-k+1}| \right| &= O(n^{-3/5+1/k} \ln n). \end{aligned} \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, 3$. Оценка (1) для случаев $k = 1$ и $k = 2$ принадлежит Голузину. Резюме автора

1331. О функциях Бибербаха — Эйленберга. Д ж е н к и н с (On Bieberbach-Eilenberg functions. II. J e n k i n s J a m e s A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 510—515 (англ.)

Ч. I см. РЖМат., 1955, 4989.

Пусть $C(\lambda)$ — класс функций $\{f(z)\}$, $f(z) = a_1 z + \ldots$, $|a_1| = \lambda$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, удовлетворяющих в круге условию $f(z_1) f(z_2) \neq 1$.

В статье решается вопрос о наиболее близкой к 0 и наиболее удаленной от 0 граничной точке области D, на которую функция $f(z)$ класса $C(\lambda)$ отображает единичный круг. Указывается экстремальная функция, расстояние границы D которой до начала $\mu(\lambda)$ является минимальным в классе $C(\lambda)$. Далее показывается, что экстремальных функций, имеющих в классе $C(\lambda)$ максимально удаленные от 0 граничные точки D, не существует, но указывается точная верхняя грань модулей граничных точек. Эта точная верхняя грань равна $\frac{1}{\mu(\lambda)}$. П. П. Белинский

1332. О теоремах искажения для некоторых классов p-листных функций. К о л б и н а Л. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, 71—76

Пусть S_p — класс функций, регулярных и p-листных в $|\zeta| < 1$ ($p \geqslant 1$), нормированных разложением вида

$$f(\zeta) = \zeta^p (1 + a_1\zeta + \cdots);$$

Σ_p — класс функций, регулярных и p-листных в области $|\zeta| > 1$ с исключенной точкой $\zeta = \infty$, нормированных разложением вида

$$f(\zeta) = \zeta^p \left(1 + \frac{a_1}{\zeta} + \cdots \right);$$

Σ_p^1 — подкласс класса Σ_p, определяемый условием $f(\zeta) \neq 0$ в $|\zeta| > 1$. Через $S_{p,z}$, $\Sigma_{p,z}$ и $\Sigma'_{p,z}$ обозначаются подклассы классов S_p, Σ_p и Σ'_p соответственно, состоящие из функций, для которых существует интеграл

$$L = \int_{|\zeta|=1} \ln|f(\zeta)| \, d \arg f_1(\zeta).$$

Доказываются следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если $f(\zeta) \in S_{p,z}$ и $|z| < 1$, то

$$|f(z)| \leqslant e^{L|rp} \frac{|z|^p}{(1 - |z|^2)^p}.$$

Оценка точная и достигается функцией

$$f^*(\zeta) = \frac{\zeta^p}{(1 - \bar{z}\zeta)^{2p}} \in S_{p,L}.$$

Т е о р е м а 2. Если $F(\zeta) \in \Sigma'_{p,L}$ и $|z| > 1$, то

$$|F(z)| \geqslant e^{-L|2p} \left(|z| - \frac{1}{|z|} \right)^p.$$

Оценка точная и достигается функцией

$$F(\zeta) = \frac{(\zeta\bar{z} - 1)^{2p}}{(\zeta\bar{z})^p} \in \Sigma'_{p,L}.$$

Т е о р е м а 3. Если $F(\zeta) \in \Sigma_{p,L}$ и $F(\zeta)$ однолистна в окрестности точки $\zeta = z$ ($|z| > 1$), то

$$e^{-\frac{1}{2p-1}L}\frac{(|z|^2-1)^{a-1}}{|z|^a}\leqslant|F'(z)|\leqslant\frac{|z|^{2p}}{|z|^2-1}e^{L},$$

где $a=\frac{2p^2}{p-1}$. При $p=1$ оценки точные. При $p>1$ вопрос о точности оценок не рассматривается.

Теорема. 4. Если $F(\zeta)\in\Sigma_{p,L}$ и имеет нуль порядка p в точке $\zeta=z$ ($|z|>1$), то

$$\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^p\leqslant\frac{1}{p!}|F^p(z)|\leqslant\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^{-p}.$$

Оценки точные и достигаются функцией

$$F^*(\zeta)=j_\alpha^p(\zeta;\ z,\infty),$$

где $j_\alpha(\zeta;\ z,\infty)$ однолистно отображает область $|\zeta|>1$ на плоскость, разрезанную по дуге логарифмической спирали с наклоном α, причем так, что точки z и ∞ переходят в 0 и ∞.

Теорема 5. Если $F(\zeta)\in\Sigma_{p,L}$ и имеет p нулей первого порядка в точках $\zeta=z_k$ ($k=1,2,\ldots,p$), то

$$M_pN_p\leqslant\prod_{k=1}^{p}|F'(z_k)|\leqslant M_pN_p^{-1},$$

где

$$M_p=\prod_{\substack{k,\ l=1\\(k\neq l)}}^{p}|z_k-z_l|,$$

$$N_p=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{|z_k|^2}\right)\cdot\prod_{\substack{k,\ l=l\\(k\neq l)}}^{p}\left|\frac{z_k\bar z_l-1}{z_k\bar z_l}\right|.$$

При доказательстве двух последних теорем используется известная лемма Г. М. Голузина о p-листных функциях (Голузин Г. М., Матем. сб., 1940, 8 (50) : 2). На странице 71 представляется недоразумением утверждение автора об отсутствии нулей у функции $f(\zeta)$ в $|\zeta|\leqslant1$ (строка 5 снизу). На странице 72 вещественная часть выражения и модуль функции обозначены одной и той же буквой R. Это повторяется и в дальнейшем. Есть опечатки. В. А. Зморович

1333. Распределение корней целых функций. Левин Б. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2., М., АН СССР, 1956, 32

1334. Обобщение ζ-функции Римана. II. Последовательность $z_{n,k}(s)$. Минь Сы-хао (黎曼ζ函數的一種推廣II. $Z_{nk}(s)$ 的階. 閔嗣鶴), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, №1, 1—11 (кит.; рез.англ.)

Доказывается, что для $A_1\leqslant\sigma\leqslant A_2$ можно найти постоянную A, зависящую от A_1 и A_2, такую, что $Z_{n,k}(s)=O(t^A)$. Резюме автора

1335. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел. Романов Н. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 12—13

1336. Экстремальные свойства целых трансцендентных функций конечной степени. Ахиезер Н. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 25

1337. Об исключительных значениях мероморфной функции. Оцука (On exceptional values of a meromorphic function. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 119—121 (англ.)

Пусть D — открытое множество плоскости z, C — граница D, $E\subset C$ и имеет внутреннюю гармоническую меру относительно D, равную 0, $z_0\in E\cap\overline{C-E}$. Через $S_{z_0}^{(D)}$ обозначается множество предельных значений для мероморфной в D функции $f(z)$ в точке z_0: $\alpha\in S_{z_0}^{(D)}$, если существует $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim z_n=z_0$, $\lim f(z_n)=\alpha$. Кроме того, вводится множество граничных предельных значений $S_{z_0}^{(C-E)}=\lim\limits_{r\to0}\overline{\bigcup\limits_{z'\in(C-E)_r}S_{z'}^{(D)}}$, здесь $(C-E)_r$ — часть $C-E$, попадающая в круг $|z-z_0|<r$. Доказывается теорема: каждое значение из $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C-E)}$ будет приниматься функцией $f(z)$ в любой окрестности z_0, за исключением, быть может, значений, образующих множество (внешней) логарифмической емкости нуль.

Для случая, когда D — область, подобная теорема была ранее установлена Цудзи (Tsuji M., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943, 19, 60—65). Г. Ц. Тумаркин

1338. Достаточные условия обратимости второго основного неравенства для мероморфных функций. Коллингвуд (Sufficient conditions for reversal of the second fundamental inequality for meromorphic functions. Collingwood E. F.), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 29—50 (англ.; рез. евр.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в конечной z-плоскости и отображает ее на риманову поверхность F. Известно (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941), что

$$N_1(r)+\sum_{i=1}^{q}m(r,\ a_i)\leqslant2T(r)+S(r),\qquad(1)$$

где $S(r)=o(T(r))$ вне множества интервалов конечной длины. В статье приводятся достаточные условия для того, чтобы в (1) $\leqslant$ можно было заменить на $\geqslant$. Пусть $\sigma(r)$ и $p(r)$ имеют конечное число скачков на каждом конечном интервале, $\sigma(r)$ не возрастает, $\ln\sigma(r)=o(T(r))$, $p(r)=o(T(r)\ln^{-1}r)$; $\Phi(t)$ — дважды дифференцируемая функция такая, что $\Phi'(t)\geqslant0$, $\Phi''(t)\leqslant0$ при $t\geqslant-\ln\pi$, $\Phi(t)\geqslant\varepsilon>0$ при $t\geqslant\ln^2/\pi$, $\Phi(t)=o(t)$. Обозначим $A=\{a_i\}$, $i=1,\ldots,q$; $d(a,A)$ — расстояние в сферической метрике от $a\overline{\in}A$ до A, $\rho(a,r)=\min\{\sigma(r),d(a,A)\}$, $\sigma(a,r)=\rho(a,r)\exp[-\Phi(-\ln\rho(a,r))]$. Пусть при $|z|=r>r_0$ для всех $a\overline{\in}A$ куски поверхности F, на которых выполняется неравенство $l[f(z),a]<\sigma(a,r)$ (l — сферическое расстояние), имеют не более $p(r)$ листов. Тогда неравенство (1) можно обратить.

Сельберг доказал это утверждение, предполагая $\sigma(r)$ и $p(r)$ постоянными (Selberg H. L., Comment. math. helv., 1946, 18, 309—326). В обобщении, данном автором (в основном — методом Сельберга), утрачивается возможность проверить выполнение достаточного условия, рассматривая только структуру поверхности F, для проверки становится необходимой детальная информация о распределении значений функции $f(z)$.

Если в указанных выше условиях неравенство $l[f(z),a]<\sigma(a,r)$ заменить на $l[f(z),a]<\sigma(r)$ и снять ограничение на a: $a\overline{\in}A$, то при $r\to\infty$ $\overline{\lim}\,N_1(r)/T(r)=2$. Из следствий отметим следующее. Если точки ветвления F проектируются в конечное число точек и $\overline{\lim}\,N_1(r)/T(r)<2$ при $r\to\infty$, то по крайней мере над одной из этих точек лежит или логарифмическая точка ветвления, или алгебраические точки ветвления сколь угодно высокой кратности.

Аналогичные результаты получены для функций, мероморфных в $|z|<1$, при условии, что $\ln(1-r)/T(r)\to0$ при $r\to1$. А. А. Гольдберг

1339. О распределении экстремальных точек на плоских множествах. Леja (Sur la distribution des points extrémaux dans les ensembles plans. Leja F.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 143—146 (франц.)

Пусть E — замкнутое ограниченное множество в плоскости z. Через $\zeta^{(n)}$ обозначается система из n каких-либо точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, принадлежащих E. Всякую систему $\eta^{(n)}, \eta^{(n)} = (\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)})$, для которой достигается $\max_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)})$, где $V(\zeta^{(n)}) = \Pi_{1 \leqslant i < k < n} |\zeta_i - \zeta_k|$, автор называет системой экстремальных точек ранга n для E. Хорошо известно, что существует $\lim_{n \to \infty} [V(\eta^{(n)})]^{\frac{2}{n-1}} = V(E)$ — трансфинитный диаметр множества E (см., например, Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.— Л., Гостехиздат, 1952).

Обозначая через F границу открытого множества, являющегося дополнением к E, $F \subset E$, автор без труда получает, что каждая точка F будет предельной точкой для треугольной последовательности экстремальных точек: $\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$. Далее вводится обозначение $\nu(n, s)$ для числа экстремальных точек $\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}$, принадлежащих $s \subset F$. Доказывается, что если множества s и $F - s$ замкнуты, то будет существовать предел $\lim_{n \to \infty} \frac{\nu(n, s)}{n}$. Г. Ц. Тумаркин

1340. Поведение интеграла типа Коши в точках разрыва плотности и исключительные случаи краевой задачи Римана. Мельник И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. I. М., АН СССР, 1956, 89

1341. Некоторые матричные уравнения и их применение к решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций и к решению систем линейных дифференциальных уравнений. Чеботарев Г. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. I. М., АН СССР, 1956, III

1342. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Чибрикова Л. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. I. М., АН СССР, 1956, III

1343. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложение к решению обратных краевых задач. Гахов Ф. Д., Крикунов Ю. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 77—78

1344. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач гидромеханики. Рогожин В. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 210—211

1345. О приближенном решении граничных задач теории аналитических функций. Манджавидзе Г. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 88

1346. Теория и приложения обратных краевых задач. Нужин М. Т., Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, 115, 24—28

Краткий обзор истории развития теории обратных краевых задач и их приложений. Отмечается, что в последнее десятилетие основные результаты в этой области были получены учеными Казанского университета.

1347. Об обратной краевой задаче для многосвязной области. Гахов Ф. Д., Уч. зап. Ростовск.-н./Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 19—27

Рассматривается внутренняя обратная краевая задача для многосвязной области, формулируемая автором следующим образом: в плоскости z определить $(n+1)$ кривых $L_0, L_1, \ldots, L_n$, ограничивающих конечную область D_z (вообще говоря, многолистную), так, чтобы, считая s длиной дуги кривых L_k, заданные функции $w_k(s) = u_k(s) + iv_k(s)$ были краевыми значениями аналитической функции $w(z)$, конформно отображающей область D_z на область D_w, ограниченную кривыми $w = w_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Функции $w_k(s)$ предполагаются периодическими периода l_k, непрерывно дифференцируемыми; кривые $w = w_k(s)$ — без взаимо- и самопересечений.

Задача рассматривается по схеме, которая была применена М. Т. Нужиным в случае односвязной области. В области D_w ищется функция, отображающая конформно D_w на D_z, по заданному соответствию между дуговыми абсциссами граничных точек.

Для определения и исследования $\ln \frac{dz}{dw}$ по граничным значениям $\left|\frac{dz}{dw}\right|$ используется интегральное представление решения задачи Шварца через комплексную функцию Грина. Рассматривая логарифмические члены этого решения, автор устанавливает условия, которым должно удовлетворять заданное соответствие между дуговыми абсциссами граничных точек для того, чтобы $\frac{dz}{dw}$ была однозначна.

В качестве примера рассматривается случай двусвязной области с круговым кольцом в качестве D_w.

Заметим, что, по-видимому, при постановке задачи, пропущено условие: $\frac{dw}{ds} \neq 0$, так как автор утверждает явно и существенно использует непрерывность $\left|\frac{ds}{dw}\right|$. С. Н. Андрианов

1348. Общая теорема коэффициентов. Дженкинс (A general coefficient theorem. Jenkins James A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 262—280 (англ.)

Пусть R — конечная ориентируемая поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифференциал на ней. Мы скажем, что Δ есть допустимая подобласть R, если Δ ограничена линиями $Q(z)\,dz^2 > 0$. Функция $f(P)$ называется допустимой в Δ, если она гомеоморфно отображает Δ в R и если существует функция $F(P, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывная по совокупности своих аргументов, причем $F(P, 0) \equiv f(P)$; $F(P, 1) \equiv P$; $F(P, t) = P$, если P — полюс $Q(z)$ в Δ; $F(P, t) \neq Q$, Q — полюс $Q(z)$ в R, $P \neq Q$. В полюсах $Q(z)$ порядка $m \geqslant 2$ допускается замена локального параметра вида $= z + \frac{b_{m-2}}{z^{m-2}} + \ldots$, $|z| > R$.

Доказывается теорема обобщающая один результат Тайхмюллера: Пусть $P_1, \ldots, P_r$ — полюсы второго порядка $Q(z)$, $P_{r+1}, \ldots, P_n$ — полюсы порядков $m_i > 2$. Пусть еще в терминах параметра z разложение $f(z)$ имеет в окрестности P_i вид

$$f(z) = a^{(i)} z + a^{(i)} + \frac{a_1^{(i)}}{z} + \ldots \text{ и } Q(z) = \frac{b^{(i)}}{z^2} + \cdots,$$

а в полюсах порядка $m_i > 2$

$$f(z) = z + \frac{a_{m_i-3}^{(i)}}{z^{m_i-3}} + \cdots \text{ и } Q(z) = b^{(i)} \cdot z^{m_i-4} + \ldots$$

(многоточием указаны члены более высоких степеней $\frac{1}{z}$). Тогда

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{r} b^{(i)} \ln a^{(i)} + \sum_{i=r+1}^{n} b^{(i)} a_{m_i-3}^{(i)}\right) \leqslant 0. \quad (1)$$

Кроме того, указываются случаи, когда в (1) может достигаться равенство. Библ. 27 назв. П. П. Белинский

1349. О существовании функции Грина. Сагава (On the existence of Green function. Sagawa Akira), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 1—2, 136—139 (англ.)

Рассматривается риманова поверхность R с границей, состоящей из конечного числа аналитических жордановых кривых. Приводится простое доказательство хорошо известного факта существования функции Грина $g(p, q)$ поверхности R с полюсом в q. При этом используется следующая теорема Парро (Parreau M., Ann. Inst. Fourier, 1952, 3), доказательство которой дается вначале. Пусть окрестность q отображается с помощью локального параметра на круг $|z|<1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, так что $z=0$ соответствует q. Через $u_n(z)$ обозначается однозначная гармоническая функция в подобласти $R_n \subset R$, ограниченной Γ и Γ_n, где Γ_n — образ на R окружности $|z|=r_n$, при отображении $p \leftrightarrow z$, для которой $u_n(p)=0$ при $p \in \Gamma$ и $u_n(p)=\ln \frac{1}{r_n}$ при $p \in \Gamma_n$. Тогда по теореме Парро, если $r_n \downarrow 0$, то $\{u_n(p)\}$ монотонно возрастает и сходится при $n \to \infty$ к функции Грина $g(p, q)$.

Далее, опираясь на теорему Парро, легко показывается, что функцию Грина $g(p, q)$ можно получать, используя вместо $\{u_n(p)\}$ последовательность гармонических в R_n функций $\left\{\frac{2\pi\omega_n(p)}{D_n}\right\}$, где $\omega_n(p)$ такова, что $\omega_n(p)=0$ на Γ и $\omega_n(p)=1$ на Γ_n ($\omega_n(p)$ — гармоническая мера Γ_n относительно R_n), а $D_n=\int_{\Gamma_n} d\bar{\omega}_n$, где $\bar{\omega}_n$ — функция, сопряженная к ω_n. Г. Ц. Тумаркин

1350. Экстремальные проблемы и гармоническая интерполяция на открытых римановых поверхностях. Сарио (Extremal problems and harmonic interpolation on open Riemann surfaces. Sario L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 362—377 (англ.)

В основу полагается ранее опубликованный автором экстремальный метод (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, 459—470). Пусть W — произвольная риманова поверхность и C — класс функций на W. Пусть $\{W_n\}$ — исчерпывающая область W, последовательность подобластей W_n, ограниченных конечным множеством β_n аналитических жордановых дуг. На W_n задается некоторый класс функций C_n и для W_n и $p \in C_n$ некоторый функционал $m(W_n, p)$; причем если $p' \in C_n$ равномерно на W_n стремится к $p'' \in C_n$, то $m(W_n, p') \to m(W_n, p'')$. Функционал $m(W, p)$ определяется условием

$$m(W, p)=\lim_{n\to\infty} m(W_n, p).$$

Проблема состоит в конструировании функции p_w, минимизирующей $m(W, p)$ в C, и в определении свойств p_w и $m(W, p)$.

Теорема приведения. Пусть функционал $m(W_n, p)$ удовлетворяет условиям: 1) проблема имеет решение для W_n, т. е. существует такая функция p_n в C_n, что $\min_{p\in C_n} m(W_n, p)=m(W_n, p_n)$, 2) $m(W_n, p) \leqslant m(W_{n+1}, p)$ для $p \in C_{n+1}$, 3) семейство $\{p_n\}$ нормально, предельные функции на W принадлежат C. Тогда каждая предельная функция $p_w=\lim_{n\to\infty} p_n$ является решением экстремальной проблемы для W, $\min_{p\in C} m \times (W, p)=m(W, p_w)$, и значение минимума

$$m(W, p_w)=\lim_{n\to\infty} m(W_n, p_n).$$

Теорема приведения дает возможность установить общую теорему о минимуме функционалов. Рассматривается класс однозначных гармонических функций p с конечным множеством заданных полюсов и логарифмических особенностей ζ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) на W. Разложение p в окрестности ζ_i имеет вид

$$p=\operatorname{Re}\left\{\sum_0^\infty a_\nu z^\nu+\lambda\left(\sum_1^m b_\nu z^{-\nu}-c\ln|z|\right)\right\},$$

где a_ν, b_ν комплексные, c — вещественный коэффициент, λ — вещественный параметр. Для фиксированных b_ν, c и λ класс $\{p\}$ обозначается через C_λ. Рассматривается функционал

$$m(p)=\int_\beta p\,dp^*+(k-h)\,\mu, \text{ где } \lambda=h+k,$$

$\mu=2\pi\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}[ca_0+\sum_{\nu=1}^m \nu b_\nu a_\nu]$, p^* — гармоническая функция, сопряженная для p, β — идеальная граница W и интеграл понимается как предел интегралов по границам исчерпывающих подобластей.

Теорема. Существует единственная функция p_{hk} в C_λ, минимизирующая $m(p)$. Для различных h и k $p_{hk}=hp_0+kp_1$, где $p_0=p_{1,0}$, $p_1=p_{0,1}$. Минимальное значение $m(p)$ равно $k^2\mu_1-h^2\mu_0$, $\mu_0=\mu(p_0)$, $\mu_1=\mu(p_1)$ и уклонение от этого минимума равняется интегралу Дирихле от $p-p_{hk}$: $m(p)=k^2\mu_1-h^2\mu_0+D(p-p_{hk})$.

Эта теорема позволяет решить интерполяционную задачу для гармонических функций. Дана открытая риманова поверхность W и некоторое конечное множество точек ζ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) на W. Среди всех гармонических функций $u(z)$ на W с заданными значениями $u_{i\nu}=\partial^\nu u/\partial x^\nu$, $\nu=0, \ldots, m$, найти минимизирующую интеграл Дирихле $D(u)$. Показывается, что $u_0=p_0-p_1$ при соответственном выборе b_ν и c минимизирует $D(u)$. Минимальное значение равно $\mu_0-\mu_1$ и $D(u)=\mu_0-\mu_1+D(u-u_0)$. Выбор коэффициентов b_ν, c обуславливается необращением в нуль некоторого определителя.

Решается аналогичная задача для аналитических функций. Е. Н. Аравийская

1351. О существовании гармонических функций на римановых поверхностях. Курамоти (On the existence of harmonic functions on Riemann surfaces. Kuramochi Zenjiro), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 23—28 (англ.)

Показано, что классы римановых поверхностей O_{HD} и O_{HDN}, на которых не существуют не равные тождественно постоянной гармонические функции с ограниченным (соответственно с ограниченным числом N) интегралом Дирихле, являются инвариантными относительно квазиконформных преобразований с ограниченной характеристикой. Это обстоятельство было доказано ранее Ройденом (РЖМат, 1955, 4395) методами функционального анализа; автор дает теоретико-функциональное доказательство. А. А. Гольдберг

1352. О полноте некоторых аналитических функций двух переменных. Еремин С. А., Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 3, 303—307

В работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, № 1) доказано, что если $f(z)$ — аналитическая функция с периодом 2π внутри полосы $-\pi \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant \pi$, то система $\{f^{(n)}(z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant \pi-\varepsilon$ (где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число), если только все

коэффициенты ряда Фурье функции $f(z)$ отличны от нуля. Благодаря этому устанавливается полнота системы $\{f(z+\alpha_n)\}$ при различных предположениях относительно последовательности чисел $\{\alpha_n\}$.

В реферируемой статье приводятся аналогичные утверждения для аналитических функций двух переменных:

Если $\varphi(w, z)$ — аналитическая функция в бицилиндре $\{|w|\leqslant 2\pi,\ |z|\leqslant 2\pi\}$, с периодом 2π по каждому переменному и все коэффициенты Фурье этой функции отличны от нуля, то система функции

$$\{\varphi^{(k+l)}_{w^k, z^l}(w, z)\}\ (k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

полна во всяком бицилиндре $\{|w|<\pi-\varepsilon,\ |z|<\pi-\varepsilon\}$ (где $\varepsilon>0$ — любое число, меньшее π).

При условиях этой теоремы утверждается, что система функций $\{f(w+\alpha_m, z+\beta_n)\}$ $(m, n = 0, 1, 2\ldots)$ полна во всяком бицилиндре $\{|w|<\pi-\varepsilon,\ |z|<\pi-\varepsilon\}$ ($\varepsilon>0$ — любое число, меньшее π).

В работе не приводится подробного доказательства. Автор утверждает, что оно аналогично доказательству вышеупомянутой теоремы референта о полноте системы функций $\{f(z+\alpha_n)\}$. И. И. Ибрагимов

1353. О мероморфных модификациях. IV. Образование аналитических и мероморфных модификаций между компактными многообразиями посредством σ-процесса. Штолль (Über meromorphe Modifikationen. IV. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse. Stoll Wilhelm), Math. Ann. 1955, **130**, № 3, 147—182 (нем.)

Работа примыкает к исследованиям Хопфа и является продолжением трех предыдущих работ автора (РЖМат, 1956, 1296, 6546, 6547). Рассматривается вопрос о построении аналитических и мероморфных модификаций посредством модификаций простого типа, так называемого σ-процесса. Вначале излагаются известные в литературе определение σ-процесса и доказательства его свойств в несколько видоизмененной, приспособленной для целей работы форме. Далее рассматриваются четырехмерные модификации $\mathfrak{M}\binom{G,A,M,\tau}{H,B,N,v}$ при ограничительном условии, что N содержит самое большое конечное множество двумерных неприводимых аналитических множеств. Это условие всегда выполняется для компактного H. Главная теорема, полученная ранее автором, позволяет перенести методы Хопфа на мероморфные модификации. Доказывается, что каждая аналитическая модификация может быть образована посредством конечного множества последовательных σ-процессов в конечных множествах и удалением некоторых излишних точек. Каждая мероморфная модификация между компактными многообразиями может быть порождена посредством конечного множества σ-процессов в конечных множествах и им обратных. Каждая модификация, образованная таким образом, является мероморфной. Существуют также немероморфные модификации между компактными многообразиями. Е. Н. Аравийская

1354. Характеристика области регулярности посредством полной метрики Келера. Грауэрт (Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik. Grauert Hans), Math. Ann., 1956, **131**, № 1, 38—75 (нем.)

Дается полное доказательство раннее опубликованных результатов (РЖМат, 1955, 5000). Е. Н. Аравийская

1355. Эргодическая теорема Хопфа о фуксовых группах. Цудзи (Hopf's ergodic theorem on Fuchsian groups. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 3, 276—289 (англ.)

Дается упрощение доказательства теоремы 1 Хопфа (Hopf E., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **39**), данного автором ранее (Proc. Imp. Acad., 1944, Japan. J. Math., 1945, **19**): Пусть D_0 — фундаментальная область фуксовой группы G конечной неевклидовой площади $\sigma(D_0)$. Пусть $S_\nu \in G$, $T_\nu = \{S_\nu(\eta_1), S_\nu(\eta_2)\}$, где $\eta_1 = e^{i\theta_1}$, $\eta_2 = e^{i\theta_2}$; $\mathfrak{S} = \{T_\nu\}$. Тогда на торе $\theta = (0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi)$ не существует измеримого множества E, инвариантного относительно $\mathfrak{S}$ и подчиненного условию $0<\mu(E)<4\pi^2$, другими словами, либо $\mu(E)=0$, либо $\mu(E)=4\pi^2$.

Показывается, что точка (z, φ), где $z\in D_0$, φ — наклон вектора, выходящего из точки z, к оси x, взаимно однозначно соответствует (η_1, η_2, s), где η_1, η_2 — концы дуги окружности, проходящей через точку z, касающейся указанного выше вектора и пересекающей единичную окружность под фиксированным углом α; s — неевклидова мера дуги $\overset{\smile}{z z_0}$, где z_0 — середина дуги $\overset{\smile}{\eta_1 \eta_2}$. Вводится понятие смещения (потока) T^α_t, переводящего (η_1, η_2, S) в $(\eta_1, \eta_2, s+t)$, и доказывается

Теорема 2. Смещение T^α_t метрически транзитивно, т. е. если M — множество, переходящее при T^α_t в себя, то $\mu(M)$ = либо 0, либо $\mu(\Omega)$, где $\Omega=\{z, \varphi\}$, $z\in D_0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Теорема 3 (аналог теоремы Вейля о равномерном распределении). Пусть множество M в D_0 измеримо по Жордану, M_ν — эквивалентные относительно G множества, $\widetilde{M}=\Sigma M_\nu$. Пусть l — линия, пересекающая граничную окружность в точке $e^{i\theta}$ под углом α, l_L — ее часть неевклидовой длины L; $L(M, \theta, l)$ — неевклидова мера пересечения l_L с $\widetilde{M}$. Тогда

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}L(M, \theta, l)=\frac{\sigma(M)}{\sigma(D_0)}.$$

Г. П Боев

1356. О квазиконформном отображении одной односвязной области на другую. Юдзёбо (On the quasi-conformal mapping from a simply-connected domain on another one. Yûjôbô Zuiman), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, **2**, № 1, 1—8 (англ.)

Автор продолжает изучение класса квазиконформных отображений, введенных им ранее (реф. 1363). Основной результат работы: при отображении одной односвязной области на другую между граничными элементами устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Указывается, что на отображения, обратные квазиконформным отображениям, переносятся результаты предыдущей статьи. И. Н. Песин

1357. К теории общих Q-квазиконформных отображений. Песин И. Н., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 223—224

Автор вводит следующие определения. Семейство $C(z, k)$ кривых C_α называется регулярным относительно точки z с параметром k, если

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\frac{\max_{z'\in C_\alpha}|z'-z|}{\min_{z'\in C_\alpha}|z'-z|}=k<\infty,$$

C_α стягивается к z при $\alpha\to 0$.

Гомеоморфное отображение называется регулярным в точке, если регулярное семейство $C(z, k)$ переходит в регулярное семейство $C(f(z), k')$. Число $q(z)=\inf kk'$, где нижняя грань берется по всевозможным семействам, называется характеристикой отображения. Наконец, отображение называется общим Q-квазиконформным, если оно регулярно в каждой точке и если

vraimax $q(z) \leqslant Q$. Понятие общего Q-квазиконформного отображения является более общим, чем понятие дифференцируемого квазиконформного отображения. Автор доказывает две теоремы важные в вопросах замыкания различных классов квазиконформных отображений.

Теорема 1. Множество точек дифференцируемости общего Q-квазиконформного отображения, в котором якобиан равен нулю, имеет меру нуль.

Теорема 2. Семейство общих Q-квазиконформных отображений нормально. П. П. Белинский

1358. О замыкании класса непрерывно дифференцируемых квазиконформных отображений. Белинский П. П., Песин И. Н., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 865—866

Авторы продолжают изучение общих Q-квазиконформных отображений $w = f(z)$, рассмотренных ранее И. Н. Песиным (реф. 1357). Доказывается теорема существования: Каковы бы ни были измеримые характеристики $p(z)$, $\theta(z)$, $p(z) < Q$, определенные почти для всех z, $|z| < 1$, существует и притом единственная функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, осуществляющая общее Q-квазиконформное отображение круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ и обладающая почти всюду заданными характеристиками. Доказательство проводится с помощью следующей леммы: Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, производит квазиконформное отображение круга $|z| \leqslant \rho$, $z = re^{i\varphi}$, $\iint (p(z) - 1)\, d\sigma_z < \varepsilon_1 \rho^2$, тогда

$$\frac{\max\limits_{\varphi} |f(r\rho e^{i\varphi})|}{\min\limits_{\varphi} |f(r\rho e^{i\varphi})|} \leqslant \eta(\varepsilon_1, r),$$

где $\eta = \eta(\varepsilon_1, r)$ зависит только от ε_1, r и $\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \eta(\varepsilon_1, r) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$. Исследуемый класс общих Q-квазиконформных отображений является замыканием класса непрерывно дифференцируемых Q-квазиконформных отображений и совпадает с пфлюгеровским классом отображений, изменяющих модуль произвольного четырехугольника не более чем в Q раз (Pfluger A., C. r. Acad. sci, 1952, **234**, № 1, 43). В работе используются некоторые известные ранее результаты Д. Е. Меньшова и П. П. Белинского. Д. Б. Потягайло

1359. О существовании решения вариационных задач квазиконформных отображений. Белинский П. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. I. М., АН СССР, 1956, 77

1360. Об экстремальных квазиконформных отображениях. I. Герстенхейбер, Раук (On extremal quasi-conformal mappings. I. Gerstenhaber Murray, Rauch H. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, **40**, № 9, 808—812 (англ.)

Пусть замкнутая (алгебраическая) риманова поверхность S_1, локальный параметр которой будем обозначать z, отображается квазиконформно на поверхность S_2, параметр которой будем обозначать w. Пусть на S_2 задана конформная метрика $\eta = \lambda\, dw \cdot d\bar{w}$, которая в терминах отображающей функции $f(z)$ запишется

$$f^*\eta = \lambda(w(z)) \cdot dw(z) \cdot d\bar{w}(z) = a(z)\, dz^2 + \bar{a}\, d\bar{z}^2 + b\, dz\, d\bar{z} = E\, dx^2 + 2F dx dy + G \cdot dy^2.$$

Из этой записи ясно, что направление dz в каждой точке S_1, для которого $a(z) \cdot dz^2 > 0$, есть направление максимального растяжения при отображении f. Тайхмюллер указал, что экстремальное квазиконформное отображение, для которого $Df = \sup\limits_{z \in S_1} \left\{ \max \left| \frac{dw}{dz} \right| : \min \left| \frac{dw}{dz} \right| \right\}$ (здесь максимум и минимум берутся в фиксированной точке по различным направлениям), минимально в классе отображений S_1 на S_2, имеет направление максимального растяжения, удовлетворяющее условию $a(z) dz^2 > 0$, где $a(t)$ — аналитическая коварианта. С другой стороны, аналитичность $a(z)$ есть необходимое условие минимизации интеграла Дирихле

$$I(f^*\eta) = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_1} (E + G)\, dx\, dy.$$

Этот последний факт, известный и ранее, авторы доказывают в статье. Отличие в доказательстве состоит в удачном применении комплексной символики.

П. П. Белинский

1361. Об экстремальных квазиконформных отображениях. II. Герстенхейбер, Раук (On extremal quasi-conformal mappings. II. Gerstenhaber Murray, Rauch H. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, **40**, № 10, 991—994 (англ.)

В этой заметке, являющейся продолжением предыдущей (реф. 1360), доказано, что если в классе гармонических отображений (у которых $a(z)\, dz^2$ — аналитический квадратичный дифференциал) варьировать метрику $\eta = \lambda\, dw d\bar{w}$ так, чтобы площадь поверхности оставалась равной 1, то функция f, соответствующая η, для которой $I(f^*\eta) = \frac{1}{2} \iint_{S_1} (E + G)\, dx\, dy$ принимает максимальное значение, обладает постоянным «растяжением» $\left(\text{т. е. } \max \left| \frac{dw}{dz} \right| : \min \left| \frac{dw}{dz} \right| \text{ постоянно}\right)$. В формулировке теоремы авторы вынуждены сделать оговорки, в которых предполагают наличие у экстремальной функции некоторых свойств, необходимых им для доказательства. П. П. Белинский

1362. Об аналитических функциях целого комплексного аргумента. Фуксман Н. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 109—110

1363. О псевдорегулярных функциях. Юдзёбо (On pseudo-regular functions. Yûjôbô Zuiman), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, **1**, № 2, 67—80 (англ.)

В области D' рассматривается класс внутренних отображений $w = f(z)$, $w = u + iv$, названных автором квазиконформными с параметром K, $K > 0$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $\overline{\lim}_{z \to z_0} \left| \frac{[f(z) - f(z_0)]}{z - z_0} \right| < \infty$ всюду в D, исключая, быть может, множество, являющееся счетной суммой множеств конечной длины; 2) почти всюду выполняется неравенство $\text{grad}^2 u + \text{grad}^2 v \leqslant 2KJ$, где J — якобиан отображения. Для класса таких отображений доказывается теорема искажения, аналогичная соответствующей теореме Альфорса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, 96), показывается компактность класса. Устанавливается ряд неполных результатов, касающихся замыкания класса и устранимых особенностей. Автор отмечает, что ему неизвестно, будет ли обратное отображение квазиконформным в указанном смысле.

Рассмотренные автором отображения входят в класс общих Q-квазиконформных отображений, рассмотренных референтом (реф 1357), вследствие чего они обладают всеми известными свойствами квазиконформных отображений. В частности, для них имеют место теоремы искажения в более точном виде (результат П. П. Белинского), а также общие результаты референта, касающиеся устранимых особенностей. Компактность класса по существу была установлена еще М. А. Лаврентьевым (Матем. сб., 1935, 42, № 4, 407—424). И. Н. Песин

1364. Добавления к моей статье «О псевдорегулярных функциях». Юдзёбо (Supplements to my paper:

«On pseudo-regular functions». Yûjôbô Zuiman), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 4, № 1, 11—13 (англ.)

Подробно доказывается известное предложение теории квазиконформных отображений, ранее использованное автором в указанной статье (реф. 1363). И. Н. Песин

1365. Функции с простыми линиями уровня. Фет А. И., Бодрецова Л. Б., Матем. сб., 1956, 38, № 3, 303—318

Пусть в плоской области G определена вещественная функция $F(P)=F(x, y)$, которая может принимать конечные и бесконечные значения и непрерывная (в том смысле, что из $P_n \to P_0$ следует $F(P_n) \to F(P_0)$). Множество уровня F_C функции $F(P)$ есть множество всех точек области G, в которых $F(P)=C$. Точку $P_0 \in G$ авторы называют обыкновенной точкой $F(P)$, если всякая окрестность $V(P_0)$ этой точки содержит окрестность $U(P_0)$ такую, что множество $U(P_0) \cap F_C$ при всяком C будет либо простой открытой дугой Жордана, либо пустым. Всякая не обыкновенная точка P_0 области G называется критической точкой функции F, в частности седловой точкой F, если в P_0 функция F не достигает относительного экстремума, и полюсом, если $F(P_0)=\pm\infty$. О семействе непересекающихся простых кривых, заполняющих область G, говорят, что оно выпрямляемо, если для каждой точки $P \in G$ существуют такая окрестность и гомеоморфное отображение этой окрестности, при котором кривые семейства переходят в параллельные прямые. Наконец, функция $F(P)$ называется функцией с простыми линиями уровня, если все критические точки ее изолированы. Авторы изучают свойства таких функций. Приведем основные результаты работы:

1. Критическая точка функции с простыми линиями уровня может быть только седловой точкой или точкой изолированного относительного максимума или минимума (в частности, полюсом). В окрестности седловой точки P_0, $F(P_0)=C_0$, множество F_{C_0} сводится к m, ($m \geqslant 2$) открытым простым дугам Жордана, пересекающимся только в P_0 (m называется порядком седловой точки).

2. Для того чтобы семейство линий уровня $F(P)$ было выпрямляемо, необходимо и достаточно, чтобы $F(P)$ была функцией с простыми линиями уровня без критических точек.

3. Пусть $F(P)$ — функция с простыми линиями уровня и $P_0 \in G$. Тогда существует окрестность $U(P_0)$ и такое гомеоморфное отображение $\varphi(x, y)$ круга $x^2+y^2<r^2$ на $U(P_0)$, что а) $F(\Phi)=R[(x+iy)^m]+C_0, C_0=F(P_0)$, если P_0 — седловая точка порядка m, $m \geqslant 1$ (при $m=1$ P_0 — обыкновенная точка), б) $F(\Phi)=\mp(x^2+y^2)$, если P_0 — точка относительного максимума (+) или относительного минимума (—) и $F(P_0)$ конечно; в) $F(\Phi)=\mp\ln(x^2+y^2)$, если $F(P_0)=\pm\infty$.

Из этого результата следует:

4. Для того чтобы $F(P)$ была в G псевдогармонической (Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, М., Изд-во ин. лит., 1951, 20), необходимо и достаточно, чтобы F была функцией с простыми линиями уровня без точек конечного экстремума.

Для непрерывной параметризации семейства плоских кривых и для установления нужных свойств пределов последовательностей таких кривых авторы используют аппарат конформных отображений, в частности используются понятия и результаты теории простых концов последовательности областей, сходящейся к ядру, предложенной референтом (РЖМат, 1954, 1627).

Г. Д. Суворов

1366. Квазиконформные однолистные отображения в трехмерном пространстве. Циммерман (Quasikonforme schlichte Abbildungen im dreidimensionalen Raum. Zimmermann Eduard), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-natur-wiss. Reihe, 1955—1956, 5, № 2, 109—115 (нем.)

По аналогии с двумерным случаем автор называет однолистное непрерывное отображение $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$, $w=w(x, y, z)$ области B трехмерного пространства квазиконформным со значением $Q(\sqrt{AQ})$, если оно а) дважды непрерывно дифференцируемо с якобианом, отличным от нуля; б) бесконечно малая сфера с центром в любой точке области B преобразуется в бесконечно малый эллипсоид с отношением длины наибольшей оси к наименьшей равномерно ограниченным в области B числом Q.

Условие а), обеспечивающее равномерное приближение отображений класса A_Q аффинными отображениями, не принципиально.

Автор рассматривает примеры квазиконформных отображений простейших областей и элементарными геометрическими приемами получает оценки величины Q. Характерный пример: параллелепипед со сторонами a, b, c отображается квазиконформно на параллелепипед со сторонами a, b, c. Тогда $Q \geqslant \sqrt{\frac{bc}{a^2}} : \sqrt{\frac{\overline{bc}}{a^2}}$.

И. Н. Песин

1367. Интегрирование по сопряженным переменным. Положий Г. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 95—96

1368. Топологическое определение псевдогармонически сопряженной функции. Берштейн (O caracterizare topologică a pseudoconjugatei unei funcţii pseudoarmonice. Bernstein I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. si fiz., 1955, 7, № 1, 75—78 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются действительные функции, определенные на некоторой поверхности S. Дается определение функции $v(P)$, $P \in S$, псевдогармонически сопряженной с псевдогармонической в смысле Морса функции $u(P)$ как функции, для которой отображение $w(P)=u(P)+iv(P)$ является внутренним в смысле Стоилова отображением поверхности S в комплексную плоскость.

Доказывается, что для того чтобы функция $v(P)$ была псевдогармонически сопряженной с функцией $u(P)$, необходимо и достаточно, чтобы $v(P)$ отображала внутренним образом в числовую прямую всякий континуум $C \subset S$, на котором $u(P)$ постоянна.

Л. Д. Кудрявцев

1369. К теории функций в пространстве симметрических матриц. Штёр (Zur Funktionentheorie im Raum der symmetrischen Matrizen. Stöhr Alfred), Math. Z., 1956, 63, № 5, 464—477 (нем.)

Дается обобщение леммы Шварца для аналитических отображений «единичных кругов» в пространстве симметрических матриц. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{Z}$ обозначают в дальнейшем симметрические матрицы соответственно порядка m и n. Линейная однородная функция $\mathfrak{M}=f(\mathfrak{Z})$ называется не повышающей ранга, если ранг $\mathfrak{M}$ всегда не превосходит ранга $\mathfrak{Z}$. Если же ранг $\mathfrak{M}$ равен рангу $\mathfrak{Z}$, то она называется сохраняющей ранг. Линейная функция вида $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}'\mathfrak{Z}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ не зависит от $\mathfrak{Z}$, называется специальной линейной функцией. В работе устанавливается интересная теорема: каждая сохраняющая ранг однородная линейная функция является специальной линейной функцией. Далее в работе введено понятие дифференциально не повышающих ранг отображений. Аналитическая матричная функция $\mathfrak{M}=\varphi(\mathfrak{Z})$ называется дифференциально не повышающей ранга, если $d\mathfrak{M}=\varphi(d\mathfrak{Z})$ — не повышающая ранга линейная функция. Аналогично определяется понятие

дифференциально сохраняющих ранг и специальных отображений. Аналог леммы Шварца формулируется следующим образом. Пусть $\mathfrak{M} = \varphi(\mathfrak{Z})$ — дифференциально не повышающая ранга аналитическая матричная функция, отображающая единичный круг в пространстве $\mathfrak{M}$ в единичный круг в пространстве $\mathfrak{Z}$. $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_2$ — две точки единичного круга. Тогда неевклидово расстояние между точками $\mathfrak{M}_1 = \varphi(\mathfrak{Z}_1)$ и $\mathfrak{M}_2 = \varphi(\mathfrak{Z}_2)$ не превосходит неевклидова расстояния между точками $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_2$.
И. И. Пятецкий-Шапиро

1370. Парааналитическая функция n измерений. Фреше (La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj. Fréchet Maurice), J. reine und angew. Math., 1956, 195, № 1—2, 22—41 (эсперанто; рез. франц.)

Развиваются результаты, ранее полученные автором (РЖМат, 1953, 710; 1954, 1173). Изучается преобразование $V = F(v)$ векторов

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ прямолинейные (прямоугольные или косоугольные) координаты точки n-мерного пространства t_n; $e_1, \ldots, e_n$ — координатные орты с данным законом R умножения:

$$e_k \cdot e_r = \sum_{h=1}^{n} u_{krh} e_h \qquad (R)$$

(u_{krh} — действительные постоянные) и где $V = F_1 e_1 + \ldots + F_n e_n$, F_i — действительная функция от $x_1, \ldots, x_n$; $i = 1, \ldots, n$. Функция $F(v)$ называется дифференцируемой (в смысле: имеющей производную) относительно данного закона R умножения для $v = v^0 = x_1^0 e_1 + \ldots + x_n^0 e_n$ справа (слева), если 1) существует дифференциал

$$(dE)_{v=v^0} \equiv \sum_{i=1}^{n} dF_i e_i,$$

где dF_i есть дифференциал в смысле Штольц — Янга (Stolz — Young) от функции $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $x_1^0 \ldots, x_n^0$; 2) существует такой вектор V_0' в пространстве t_n, что

$$(dF)_{v=v^0} = dv \cdot V_0' \; ((dF)_{v=v^0} = V_0' \cdot dv)$$

(при умножении согласно данному закону R). Здесь $dv = dx_1 e_1 + \ldots + dx_n e_n$ есть вектор любого направления в пространстве t_n и V_0' не зависит от dv.

В случае алгебры векторов в пространстве t_n с ассоциативным и коммутативным законом умножения R и с единицей (обозначаемой $I = \sum_k I_k e_k$) функция $F(v)$ называется паракомплексной векторной функцией, закон умножения R — законом R_p, а все векторы такой алгебры — паракомплексными. Доказывается единственность производной V_0' паракомплексной векторной функции $F(v)$, дифференцируемой для $v = v^0$, и дифференцируемость самого паракомплексного вектора v как функции от v. Паракомплексная векторная функция $V = F(v)$ называется парааналитической для $v = v^0$ относительно данного закона умножения R_p, если в некоторой окрестности v^0 все функции $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеют дифференциалы всевозможных порядков и если существует производная V' для всех векторов v этой окрестности относительно данного закона умножения R_p. Доказывается, что эта производная V' есть парааналитическая векторная функция для $v = v^0$ относительно того же закона умножения R_p (понятие парааналитической векторной функции есть частный вид понятия гиперкомплексной функции, моногенной по отношению к другой гиперкомплексной функции, данного референтом (Матем. сб., 1946, 18 (60), № 3, 353—378) *Реф.*). Из остальных результатов отметим: 1) дифференциальные уравнения для компонент F_i паракомплексной дифференцируемой функции, имеющие вид (в случае $I_1 = 1$, $I_k = 0$, $k = 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_r} = \sum_{k=1}^{n} u_{krh} \frac{\partial F_k}{\partial x_1}; \quad \begin{pmatrix} r = 2, \ldots, n \\ h = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

2) правила дифференцирования и построение примитивных функций для паракомплексных дифференцируемых функций и аналог интегральной теоремы Коши для этих функций; 3) краткую теорию степенных рядов, расположенных по степеням паракомплексного вектора v.

Имеются опечатки: на стр. 27 в формуле 18 напечатано x_n вместо x_n^0. На стр. 31 в формуле 29 напечатано $r = 2,\ldots r$; $h = 1,\ldots,r$ вместо $r = 2,\ldots, n$; $h = 1,\ldots,n$.
Библ. 11 назв. В. С. Федоров

1371. К. Функции комплексного переменного. Уэйнберг, Стекольчик, Журкеску (Functii complexe. Weinberg L., Stecolcic L., Jurchescu M. Univ.«C. I. Parhon» Bucureşti, 1955, 381 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, **4**, № 7, 257 (рум.)

1372 К. Лекции о конформном отображении многосвязных областей. Жюлиа (Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. Julia Gaston. Paris, Gauthier-Villars, 1955, vi, 95 p., ill., 700 fr.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 17, 392 (франц.)

1373 К. О проблеме Ватсона в классе полуаналитичности. Сан-Хуан-Льоса (El problema de Watson y las clases semianaliticas. San Juan Llosa Ricardo. Madrid, C. S., I. C., 1955, 77 p., il., 50 pes.), Bibliogr. hispanica, 1956, **15**, № 3, 78 (исп.)

1374 Д. О некоторых проблемах единственности и продолжения, относящихся к функциям, которые могут быть приближены экспоненциальными суммами. Кахан (Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. Thèse. Kahane Jean-Pierre. Chartres, impr. de Durand, 1954, 101 p.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 9, 200 (франц.)

1375 Д. Множества радиальной разрывности целых и мероморфных функций Осборн (Sets of radial discontinuity of entire and meromorphic functions. Osborn James Maxwell.— Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 9, 1626 (англ.)

1376 Д. О некоторых классах бесконечно дифференцируемых функций. Лалагю (Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables. Thèse. Lalague Pierre. Paris, Gauthier — Villars, 1955, 66 p.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 17, 392 франц.)

1377 Д. Функционалы области для псевдоаналитических функций. Ли Цзи-юань (Domain functionals for pseudoanalytic functions. Lee Chi-Yuan. — Doct. Diss., Univ. Washington, 1954), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 2, 272 (англ.)

1378 Д. Аналитические функции бесконечного гармонического гиперкомплексного переменного. Слон (An analytic functions of an infinite harmonic hypercomplex variable. Sloan Robert Wesley) —

Doct. diss., Univ. Illinois, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 10, 1867—1868 (англ.)

Указывается, что в работе подробно рассмотрены свойства некоторых гиперпеременных x с бесконечным базисом, которые можно представить в виде

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_{-1} e_{-1},$$

где x_0, x_1, x_{-1} — обычные вещественные или комплексные переменные, e_0, e_1, e_{-1} — первые элементы бесконечного множества базиса элементов e_0, e_n, e_{-n} $(n=1,2,3,\ldots)$, подчиненных определенным правилам умножения (Ketchum P. W., Amer. J. Math., 1929, **51**, 179). Рассматривается нормированное кольцо векторов (Lorch. E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **54**, 414), образованное абсолютно сходящимися элементами системы (т. е. $\sum a_n e_n$, где $\sum |a_n|$ сходится), и в некоторых случаях устанавливается единственность деления. В результате получается более широкий класс аналитических функций, чем ранее рассмотренные Лорхом и Шеффером (Scheffer G., Leipziger Berichte, 1893, **45**, 828).

Е. Н. Аравийская

См. также: 1418, 1437, 1446, 1494, 1531, 1532, 1552, 1560, 1568, 1573, 1576.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1379. О начальных условиях при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Тайзард (Note of initial conditions in the solution of linear differential equations with constant coefficients. Tizard R. H.), Econometrica, 1956, **24**, № 2, 192—197 (англ.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения

$$\Psi(D)\,P(t) = \Phi(D)\,u(t);$$

искомое значение $P(t)$ может быть определено согласно

$$L\{P(t)\} = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} L\{u(t)\} - \frac{F(p)}{\Psi(p)}.$$

P — оператор Лапласа.

Рассматриваются состояния системы до и после приложения внезапного возмущения и находятся выражения, характеризующие связь начальных условий $P(t)$ и коэффициентов полиномов $\Psi(D)$ и $\Phi(D)$.

Г. М. Уланов

1380. О некоторых неопределенных дифференциальных уравнениях. Митринович (O nekim neodredenim diferencijalnim jednačinama. Mitrinović Dragoslav S.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 3—4, 171—178 (серб.; рез. франц.)

Излагаются методы интегрирования некоторых типов дифференциальных уравнений Монжа, принадлежащие автору (C. r. Acad. sci., 1951, **232**, 1334—1336; 1950, **231**, 327—328, РЖМех, 1956, 7413 и др.).

В конце дается библиографический список работ по теории упругости и гидродинамике, которые натолкнули автора на мысль развить эти методы интегрирования для задач, сводящихся к одному неопределенному уравнению.

Цель статьи — побудить новые исследования по проблемам, поставленным в работах по теории упругости и гидродинамики (см. [6] — [17]), пользуясь методами интегрирования автора, еще неизвестными тогда, когда изучались в этих работах поставленные вопросы. В этом отношении нужно обратить особое внимание на сочинение Эрмита (L'Hermite R., Résistance des matériaux, т. 1, Paris, Dunod, 1954, стр. 643).

Резюме автора

1381. Асимптотические формулы для функционалов решений уравнений Томаса-Ферми. Яненко Н. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I, М., АН СССР, 1956, 226—227

1382. Об уравнении Риккати. Барруш-Видал (Sobre a equação de Riccati. Barros Vidal Carlos E.), Técnica, 1956, **31**, № 258, 225—238 (порт.)

Общий интеграл уравнения Риккати находится при помощи квадратур без использования частных решений этого уравнения. Но результат содержит вспомогательную функцию, которая должна удовлетворять другому уравнению Риккати или равносильной системе уравнений.

Г. К. Энгелис

1383. По поводу уравнения Риккати. Роша (A propósito da equação de Riccati. Rocha Ernâni), Técnica, 1956, **31**, № 261, 371—377 (порт.)

Подробный критический разбор статьи Барруш-Видала (реф. 1382). Новых результатов не содержится.

Г. К. Энгелис

1384. Об уравнении Риккати. Анджелеску (Asupra ecuaţiei lui Riccati. Angelescu Traian), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 12, 663—668 (рум.)

Дается несколько признаков разрешимости в квадратурах общего уравнения Риккати.

Г. К. Энгелис

1385. Теория локального анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. II. Цинь Юаньсюнь (常微分方程的區域分析理論 II. 秦元勳), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 2, 184—205 (кит.; рез. англ.)

Возьмем

$$\begin{aligned} dx/dt &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y = X_1, \\ dy/dt &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y = Y_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

в качестве приближенных для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dx/dt &= X(x, y), \\ dy/dt &= Y(x, y) \end{aligned} \qquad (2)$$

в области S. Условие, характеризующее близость систем (1) и (2), остается тем же самым, именно предполагается что функционал

$$I(a_{ij}, b_{ij}, S) \equiv \int\int_S [\{X - X_1\}^2 + \{Y - Y_1\}^2]\,dS \qquad (3)$$

имеет абсолютный минимум. В частности, если в качестве области S взять область, симметричную относительно осей x и y, тогда коэффициенты системы (1) могут быть представлены следующими формулами:

$$\begin{aligned} a_{00}(S) &= \int\int_S X dS \Big/ \int\int_S x^2 dS,\ b_{00}(S) = \\ &= \int\int_S Y dS \Big/ \int\int_S y^2 dS, \\ a_{10}(S) &= \int\int_S xX dS \Big/ \int\int_S x^2 dS,\ a_{01}(S) = \\ &= \int\int_S yX dS \Big/ \int\int_S y^2 dS, \end{aligned} \qquad (4)$$

$$b_{10}(S) = \iint_S xY dS \Big/ \iint_S x^2 dS, \quad b_{01}(S) = \iint_S yY dS \Big/ \iint_S y^2 dS.$$

В 1-й части сохраняется классификация точек, рассматривавшаяся в предшествующей статье (РЖМат, 1956, 8784). Короче говоря, классификация точек (x, y) проводится исходя из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} [\partial X(x,y)/\partial x] - \lambda & \partial X(x,y)/\partial y \\ \partial Y(x,y)/\partial x & [dY(x,y)/\partial y] - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Как применение, рассматривается основная проблема малого параметра с точки зрения анализа поведения кривых в области. Посредством конкретных примеров сравнивается наш метод с методом Лайтхилла (Laighthill) и открывается основной недостаток традиционного метода.

Во 2-й части рассматривается аппроксимация в целом и в качестве приложения обсуждается вопрос о положении предельного цикла.

Сокращённое резюме автора

1386. Применение «геометрического метода» к некоторым вопросам исследования динамической системы на плоскости. Маркосян С. А. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 59—60

1387. Применение теории непрерывных групп преобразований к исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Молчанов Н. Н. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I, М., АН СССР, 1956, 60—61

1388. Асимптотические соотношения для собственных значений и собственных функций некоторой задачи колебаний. Эрлинг (Asymptotiska relationer för egenvärden och egenfunktioner till ett enkelt svängningsproblem. Ehrling Gunnar), Medd. Lunds univ. mat. sem., 1954, 12 (швед.)
См. РЖМат, 1956, 8792.

1389. Новый метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на теории моментов. Гаврилов Н. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 45—46

1390. Задача Коши и асимптотические ряды для решения систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Градштейн И. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 50—51

1391. К теории оптимальных процессов. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 218

1392. О работах членов Свердловского семинара по качественным методам в теории дифференциальных уравнений. Барбашин Е. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 42—43

1393. О дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах некоторых типов. Инаба (On differential equations in locally convex spaces of some types. Inaba Mituo), Kumamoto J. Sci., 1955, B2, № 2, 119—124 (англ.)
Дифференциальное уравнение

$$dx/dt = f(x, t) \quad (1)$$

рассматривается в линейном пространстве E, в котором топология определена при помощи последовательности полунорм $\{p_n\}$. При помощи принципа неподвижной точки А. Н. Тихонова доказана следующая теорема.

Пусть функция $f(x, t)$ непрерывна и ограничена на $E \times [a, b]$ и $p_n(f(x, t)) \leqslant M_n$. Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения (1), удовлетворяющее заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$ и определенное на $[a, b]$.

Далее рассмотрен случай, когда E является топологическим произведением пространств, в которых топология определяется последовательностью полунорм.

М. А. Красносельский

1394. О зависимости решения операторно-дифференциального уравнения от начальных данных. Пулькин С. П., Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 57—62
Рассматривается уравнение

$$dx/dt = A(t)x + B(t)x \quad (1)$$

в банаховом пространстве. Здесь $A(t)$ — линейная оператор-функция, $\|A(t)\| \leqslant M$ при $0 \leqslant t \leqslant L$, $B(t)$ — нелинейная оператор-функция, удовлетворяющая условию $\|B(t)x\| \leqslant K\|x\|^2$ при достаточно малых $\|x\|$ и условию Липшица. Методом последовательных приближений доказывается, что при $LM < 1$ решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, может быть записано в виде

$$x(t) = \bar{A}(t)x_0 + \bar{B}(t)x_0,$$

где $\bar{A}(t)$ — линейная оператор-функция с равномерно ограниченной нормой, а $\bar{B}(t)$ удовлетворяет условию $\|\bar{B}(t)x\| \leqslant K_1\|x\|^2$.

М. А. Красносельский

1395. К вопросу об использовании аппарата тензорных операторов при расчетах по применению метода неполного разделения переменных. Левинсон И. Б., Ванагас В. В., Юцис А. П., Liet TSR mokslu Akad. darbai, Тр. АН ЛитССР, 1956, 5Б, 21—32 (рез. лит.)

1396. Некоторые замечания об асимптотической устойчивости. Халанай (Cîţeva observaţii asupra stabilităţii asimptotice. Halanay A.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser ştiinţ., natur., 1956, № 9, 31—38 (рум.; рез. русс., франц.)
Доказаны некоторые теоремы об устойчивости тривиального решения системы

$$dx_\nu/dt = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)x_\mu + X_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$$

при обычных предположениях. Эти теоремы могут быть легко получены из известных результатов Важевского (Ważewski T., Studia math., 1948, 10), Перрона (Perron O., Math. Z., 1936, 32) и Гробмана (Матем. сб., 1952, 30 (72)).

Р. Э. Виноград

1397. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Йосидзава (On the stability of solutions of a system of differential equations. Yoshizawa Taro), Mem. Coll. Sci., Univ., Kyotǫ, 1955, A29, № 1, 27—33 (англ.)
Для системы дифференциальных уравнений

$$dy/dx = F(x, y) \quad (1)$$

(y — n-мерный вектор, $F(x, y)$ — непрерывная вектор-функция в области $\Delta: 0 \leqslant x < \infty$, $|y| \leqslant R$, $F(x, 0) \equiv 0$) доказывается ряд теорем ляпуновского типа.

Для того чтобы решение $y \equiv 0$ было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Phi(x, y)$, определенная в Δ, такая, что: 1) $\Phi(x, y) > 0$ при $|y| \neq 0$; 2) $\Phi(x, 0) \equiv 0$; 3) для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant R$) существует $K(\varepsilon)$ такое, что $\Phi(x, y) \geqslant K(\varepsilon)$ при $0 \leqslant x < \infty$, $|y| = \varepsilon$; 4) $\Phi(0, y)$ непрерывна при $y = 0$; 5) для любого решения $y(x)$ функция $\Phi[x, y(x)]$ — невозрастающая функция x.

Вводятся понятия эквиустойчивости, равномерной эквиустойчивости и сильной устойчивости, являющиеся промежуточными между понятиями устойчивости и асимптотической устойчивости; для них доказываются аналогичные теоремы.

В. А. Якубович

1398. Замечания к статье М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера «Условия существования области устойчивости для одноконтурной системы автоматического регулирования». Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 3, 447

В заметке содержится исправление одного из условий структурной устойчивости систем автоматического регулирования, данного в указанной в названии статье тех же авторов (РЖМат, 1954, 4741). Г. М. Уланов

1399. Некоторые вопросы устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Лященко Н. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 223—224

1400. Необходимые и достаточные условия правильности системы дифференциальных уравнений. Виноград Р. Э., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 200—201

1401. Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Болтянский В. Г., Понтрягин Л. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 217—218

1402. Об асимптотическом поведении решений некоторых дифференциальных уравнений нелинейных колебаний. Волосов В. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 219—220

1403. Применение операции D-разбиения для построения корневых характеристик и исследования качества систем автоматического регулирования. Гопп Ю. А., Автоматика и телемеханика, 1956, 17, № 9, 789—798 (рез. англ.)

1404. Об устойчивости стационарных и установившихся движений. Гурин А. И. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1956, 49, 69—97

1405. Устойчивость решений систем уравнений в полных дифференциалах. Егоров В. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 52—53

1406. О зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Волосов В. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 96—97

Дан обзор работ авторов доклада.

1407. Исправление к статье «Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, \lambda)$». Вольпато (Rettifica alla memoria: Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, \lambda)$. Volpato Mario), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 273—278 (итал.)

К РЖМат, 1956, 412.

1408 К. Курс дифференциальных уравнений. Степанов (Równania różniczkowe. Stepanov Vjačeslav Vasil'evič. Tłum. z ros. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 498 s., il., 45.60 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 24, 354, (польск.)

1409 Д. Регуляризация некоторых систем дифференциальных уравнений. Бенсон (Regularization of certain systems of differential equations. Benson Dean C.— Abstr. doct. diss. Iowa State Coll., 1954), Iowa State Coll. J. Sci., 1956, 30, № 3, 322—323 (англ.)

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\lambda(x, y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda(x, y)\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega(x, y)}{\partial y},$$

где функция $\Omega(x, y)$ может иметь алгебраические особенности с обращением в бесконечность в нескольких точках. В различных случаях даются преобразования неизвестных функций и независимого переменного, приводящие к полному или частичному исчезновению этих особенностей. А. Мерман

1410 Д. Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка около простой особой точки второго порядка. Брагг (The solutions of a linear ordinary differential equation of the third order about a simple turning point of the second order. Bragg Louis Richard. — Doct. diss. Univ. Wisconsin, 1955),—Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 12, 2536 (англ.)

1411 Д. Нормальная самосопряженная задача на собственные значения и верхняя и нижняя границы для собственных значений, полученных итерационными методами. Кестенс (The normal self-adjoint eigenvalue problem and upper and lower bounds for the eigenvalues with the iteration method. Kestens Jean. — Doct. diss. Brown Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 8, 1407 (англ.)

1412 Д. Исследование вопроса о колебаниях и устойчивости решений уравнения второго порядка. Зубова А. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1956

1413 Д. Об одном классе решений полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Яцеев В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Томский ун-т, Томск, 1956

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1414. Граничные задачи в теории обобщенных функций. Лион (Problèmes aux limites en théorie des distributions. Lions J. L.), Acta math. 1955, 94, 13—153 (франц.)

Пусть Ω — область R^n, $\mathfrak{D}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне компакта $\subset\Omega$, с топологией Шварца; Q — локально выпуклое векторное топологическое пространство, V — гильбертово пространство и

$$\mathfrak{D}\subset V\subset Q\subset\mathfrak{D}';\quad \mathfrak{D}\subset Q'\subset\mathfrak{D}',$$

где $\mathfrak{D}'$, Q' — пространства, сопряженные $\mathfrak{D}$, Q, вложения предполагаются непрерывными и $\mathfrak{D}$ плотно в Q. На $V\times V$ задается непрерывная форма $((u, v))$; $((u, \lambda v)) = \bar{\lambda}((u, v))$. При фиксированной $u\in V$ функционал $((u, \varphi))$, $\varphi\in\mathfrak{D}$ может быть реализован в виде: $((u, \varphi)) = \langle\Lambda u, \varphi\rangle$, $\Lambda u\in\mathfrak{D}'$; $\langle\ ,\ \rangle$ — соотношение сопряженности между $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$. Определенный так оператор Λ эллиптичен, если

$$((u, v)) + \overline{((v, u))} \geqslant a\|u\|_V^2;\quad a > 0.$$

Обозначим через N пространство функций $u\in V$, для которых $\Lambda u\in Q'$ и

$$\langle\Lambda u, \overline{v}\rangle = ((u, v)) \text{ для всех } v\in V$$

(здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — соотношение сопряженности между Q, Q').

Теорема: Если форма $((u, v))$ эллиптична, то задаваемый ею оператор Λ определяет изоморфизм N на Q'.

Оператор Λ^{-1} обозначается G и называется оператором Грина. Далее вводится пространство K, более широкое, чем N, оператор Λ расширяется на $u\in K$ (причем $\Lambda u\in Q'$) и определяется граничная задача: при заданных $F\in Q'$, $h\in K$ найти $u\in K$ такую, что $\Lambda u = F$, $u - h\in N$. Решение записывается $u = h + G(F - \Lambda h)$. Рассматривается вопрос об условиях справедливости для Λ теорем Фредгольма, о полноте системы собственных функций, о регулярности (по Шварцу) и устойчи-

вости оператора Грина. Приводится подробная схема применения развитой теории к заданному дифференциальному оператору и рассматриваются примеры. Автор не указывает, что вопросы о структуре оператора G, об устойчивости и обобщениях граничных задач, аналогичные даваемым в примерах, были (для случая, когда правая часть — обычная функция) изучены М. И. Вишиком (Докл. АН СССР, 1951, 81(5), 717—720, 1952, 86(4), 645—648).

Во 2-й части вводится пространство $\mathfrak{D}'_+(t, L)$, элементы которого (обобщенные функции от t со значениями в L) сопоставляют бесконечно дифференцируемой функции t, равной нулю при $t > a$, точку пространства L. В $\mathfrak{D}'_+(t, L)$ может быть введена операция свертки по t и преобразование Лапласа. Оператор, для которого ставится смешанная задача (отыскание функции из $\mathfrak{D}'_+(t, N)$ по функции из $\mathfrak{D}'_+(t, Q')$), записывается в виде $1 \otimes \Lambda + K^* \otimes$ и определяет отображение $\mathfrak{D}'_+(t, N)$ в $\mathfrak{D}'_+(t, Q')$ (Пространства N и Q' предполагаются банаховыми). С помощью преобразования Лапласа доказывается, что, при соответствующих предположениях относительно Λ и K^* отображение будет изоморфизмом. В примерах Λ — эллиптический оператор, а K — оператор дифференцирования по t (быть может,— дробного порядка).

Рассматриваются самосопряженные и несамосопряженные задачи, вопрос об устойчивости и регулярности ядра разрешающего оператора, о дифференцируемости решения по t в обычном смысле. Приводимые примеры обобщают обычные постановки смешанных задач для уравнений с 1-й и 2-й производной по времени.

А. А. Дезин

1415. Качественные теоремы для уравнений с частными производными. Зайдман (Teoreme calitative pentru ecuatii cu derivate parţiale. Zaidman S.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1955, 6, № 3—4, 645—666 (рум.; рез. русс., франц.)

Изучаются системы вида

$$\partial u/\partial t = Au + F(x, t, u), \qquad (1)$$

где A — сильно эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$, соответствующий однородным краевым условиям Дирихле, причем предполагается, что операторы A и A^* ограничены сверху и имеют неположительную верхнюю грань β, а векторная функция $F(x,t,u) \in D_A$ и удовлетворяет условию Липшица относительно u по норме соответствующего гильбертова пространства. Если константа Липшица $g(t)$ суммируема, $\int_0^\infty g(t)dt < \infty$, то решения системы (1) устойчивы, если $\beta = 0$, и асимптотически устойчивы, если $\beta < 0$. Если же $g(t) = L$, $\beta < 0$, то имеет место устойчивость в случае, когда $L + \beta = 0$, и асимптотическая устойчивость в случае, когда $L + \beta < 0$. Если векторная функция $F(x, t, u) = f(x,t)$ не зависит от u и является почти периодической в смысле Бохнера, $0 < t < \infty$, то все решения системы (1) являются асимптотически почти периодическими в смысле Фреше, причем существует одно решение почти периодическое в смысле Бохнера. Доказанные теоремы применяются к волновому уравнению и уравнению Шредингера. В частности, вновь доказаны некоторые результаты С. Л. Соболева и других авторов.

В. Э. Лянце

1416. Задача Коши для волнового уравнения в распределениях Шварца. О'Кифф (The initial value problem for the wave equation in the distributions of Schwartz. O'Keeffe J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 422—434 (англ.)

Известная формула решения задачи Коши для волнового уравнения в n-мерном пространстве (см., например, Курант, Гильберт, Методы математической физики, 1937, т. 2, гл. 6, § 5) получается преобразованием Фурье по пространственным переменным с применением теории Шварца (поскольку приходится вычислять преобразование Фурье от неинтегрируемой функции $\sin rt/r$). Автор указывает, что в книге Шварца (Schwartz L., Theorie des distributions, 1952, I, II) соответствующее вычисление излишне усложнено, поскольку там делается преобразование Фурье по всем переменным, включая t (Очевидно, автору неизвестна статья Шварца (Schwartz L., Ann. Inst. Fourier, 1951, 2, 19—49), где рассматриваемая формула получается преобразованием Фурье именно по пространственным переменным).

Г. Е. Шилов

1417. Граничные задачи в расслояемых пространствах. Лион, Шварц (Problèmes aux limites sur des espaces fibrés. Lions J. L., Schwartz L.), Acta math. 1955, 94, 155—159 (франц.)

Рассматривается расслояемое пространство E с базой X — n-мерным действительным бесконечно — дифференцируемым многообразием и слоем C^χ — χ-мерным комплексным векторным пространством Секущей поверхностью называется бесконечно — дифференцируемое отображение $x \to s(x)$ X в E такое, что $s(x) \in E_x$ (слою над x) для всех $x \in X$. Множество секущих поверхностей, оснащенное топологией комплексного векторного пространства, обозначаемое $\mathfrak{D}(E)$, рассматривается как обобщение пространства бесконечно дифференцируемых функций. Проводятся построения, позволяющие определить сопряженное пространство $\mathfrak{D}'(E)$, и указывается, что все рассмотрения статьи Лиона (реф. 1414), проведенные на базе классических пространств обобщенных функций, могут быть воспроизведены для пространств $\mathfrak{D}(E)$, $\mathfrak{D}'(E)$ и соответствующих пространств V, Q и т. д. (реф. 1414). В качестве примера рассматриваются граничные задачи в римановом пространстве.

А. А. Дезин

1418. О многозначных решениях линейных уравнений с частными производными. Бергман (On multivalued solutions of linear partial differential equations. Bergman S.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 64—68 (англ.)

Краткий обзор некоторых основных результатов, полученных автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 461—507; 1952, 73, 1—34), об аналитическом характере решений уравнения $\Delta\Psi + F\Psi = 0$ в 2- или 3-мерном пространстве, причем функция F целая и в трехмерном случае имеет вид $F(x^2+y^2+z^2)$. Общее решение представляется в виде $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)} S^{(n)}$, где сомножители $Q^{(n)}$ зависят только от функции F, а сомножители $S^{(n)}$ — от произвольной аналитической или гармонической функции (эта зависимость выписывается явно), алгебраический характер которой и определяет свойства (в частности, характер особенности) решения. Рассматриваются также [illegible] решения.

А. [illegible]

1419. Функционально-инвариантные решения уравнений 4-го порядка с двумя независимыми переменными. Смирнов М. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, 122—125

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + a_5 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} +$$

$$+ b_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + b_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + b_4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} +$$

$$+ c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i и d_i суть функции от x, y, имеющие непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Функция u называется функционально-инвариантным (ф.-и.) решением уравнения (1), если $F(u)$ есть решение уравнения (1) при произвольной функции F.

В статье даны необходимые и достаточные условия для существования ф.-и. решений уравнения (1). В качестве примера дано решение задачи Коши для одного уравнения частного вида типа (1). Это исследование тесно связано с работой Н. П. Еругина (Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. н., 1949, № 16). К. К. Малинский

1420. О предельном переходе от разностного уравнения к уравнению в частных производных. Дальквист (On the passage to the limit from a partial difference equation to a partial differential equation. Dahlquist Germund), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 24—25 (англ.)

Задача Коши

$$\partial^2 F / \partial t^2 = \partial^2 F / \partial x^2, \quad F(x, 0) = f(x), \quad \partial F(x, 0) / \partial t = g(x)$$

заменяется на задачу Коши для разностного уравнения

$$\frac{\Phi(x, t+\Delta t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x, t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} = \frac{\Phi(x+\Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2},$$

$$\Phi(x, 0) = f(x), \ \Phi(x, \Delta t) = f(x) + \Delta t \cdot g(x).$$

Если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции от $z = x+iy$ в области $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant (b-a)/3$, то при $\Delta t \to 0$, $\Delta x / \Delta t = u = \text{const}$ функция Φ сходится к F равномерно в области $a + |t| \leqslant x \leqslant b - |t|$ вещественной плоскости x, t. Если $u > 5/9$, то коэффициент $1/3$ можно заменить меньшим; $\frac{1}{2} u \operatorname{arch} \frac{1}{u}$. Доказательства не приведены. А. Ф Филиппов

1421. Уравнение $(\Delta l)^2 = 1$ в комплексной области. Бохенек (Equation $(\Delta l)^2 = 1$ in the complex domain. Bochenek K.), Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 3. 1956, 4, № 3, 119—124 (англ.)

Уравнение $(\Delta l^2) = 1$ в комплексной области. Бохенек К., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 3, 115—119

Исследуется уравнение

$$(\operatorname{grad} l)^2 = 1, \qquad (1)$$

где $l = l(x, y)$ — комплексная функция действительных переменных, и начальное условие

$$l = l_0(r) = u_0(r) + iv_0(r) \text{ для } x = x_0(r), \ y = y_0(r)$$

$$(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = 1). \qquad (2)$$

Пусть, кроме того, функции x_0, y_0, u_0, v_0 аналитичны в некотором интервале $\langle \alpha, \beta \rangle$. Если, сверх того, $(l_0')^2 \neq 1$ и $|a'| + |b'| > 0$, $|\operatorname{Im} a| + |\operatorname{Im} b| > 0$, где $a = l_0' x_0' + y_0' \sqrt{1 - (l_0)^2}$, $b = l_0' y_0' - x_0' \sqrt{1 - (l_0')^2}$, то существует решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), определенное в близости кривой $x = x_0$, $y = y_0$, $r \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и представимое в параметрической форме.

Далее автор выводит уравнение для векторного поля $\operatorname{grad}(\operatorname{Re} l)$. A. Pliś

1422. Теорема существования в задаче Коши с начальными условиями на декартово заданной кривой. Массими (Un teorema di esistenza per i problemi di Cauchy con condizioni iniziali su curve dotate di rappresentazione cartesiana. Massimi Rosanna), Rend. mat. e applic, 1955, **13**, № 3—4, 433—439 (итал.)

В области D плоскости (t, x), определяемой неравенствами: $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $|t - \alpha(x)| \leqslant l$, решается задача Коши для дифференциального уравнения

$$\partial^m u / \partial t^m + a \partial^n u / \partial x^n = 0, \qquad (1)$$

с начальными условиями:

$$\partial^i u / \partial t^i |_{t=\alpha(x)} = \varphi_i(x), \ i = 0, 1, \ldots, \overline{m-1}. \qquad (2)$$

При этом a — вещественная постоянная и $m \geqslant n$. Методом итераций доказывается

Теорема: Если $\alpha(x)$ и $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, \overline{m-1})$ имеют производные любого порядка, удовлетворяющие неравенствам:

$$|d^h \varphi_i(x) / dx^h| < N (h!)^{m|n} / \rho^h, \ |d^h \alpha(x) / dx^h| < l (h!)^{m|n} / \rho^h,$$

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \ i = 0, 1, \ldots, \overline{m-1}, \ h = 0, 1, \ldots,$$

где N и ρ — положительные постоянные и

$$\rho^n > |a| l^m 2^{2m+n},$$

то в D существует хотя бы одно бесконечно дифференцируемое по x и m раз непрерывно дифференцируемое по t решение задачи (1) — (2). Л. Н. Слободецкий

1423. О некоторых применениях преобразования Лапласа в граничных задачах. Эбаноидзе (სასაზღვრო ამოცანებში ლაპლასის გარდაქმნის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ. ებანოიძე თ.), თბილისის სახ. უნივერსიტეტის სტუდენტთა სამეცნიერო შრომების კრებული, Сб. науч. работ студ. Тбилисск. ун-т, 1955, № 7, 1—7 (груз. рез. русс.)

Статья представляет собою краткий исторический обзор применения метода преобразования Лапласа к решению граничных задач математической физики. Для иллюстрации метода рассматривается граничная задача Коши-Дирихле для колебательного уравнения с переменными коэффициентами. П. З. Зерагия

1424. Об одной краевой задаче для уравнений смешанного типа. Смирнов М. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 69—70

1425. Некоторые применения метода конечных разностей к дифференциальным уравнениям. Мейман Н. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 60

1426. О характеристиках монжева уравнения. Николаенко М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 160

1427. О единственности решения уравнений гидродинамики. Годунов С. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 202

1428. О релятивистском уравнении квантовой механики. Аржаных И. С., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 234—237

1429. Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных. Фаге М. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 71—72

1430. Об одном методе решения основной задачи теории упругости. Лопатинский Я. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 59

1431. Задачи Коши для уравнений типа С. Л. Соболева. Гальперн С. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 47—48

1432. Векторный способ преобразования системы дифференциальных уравнений к простой форме. Люкшин В. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 158—159

1433. Некоторые теоремы качественной теории уравнений в частных производных второго порядка.

Скоробогатько В. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 68—69

1434. Сингулярная задача Трикоми. Пулькин С. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 65—66

1435. Общие свойства решений линейных эллиптических уравнений. Йон (General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. John Fritz), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 113—175 (англ.)

В первой главе приводится доказательство единственности в некоторой большой области решения задачи Коши в классе неаналитических, но достаточно гладких функций для линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами. В основе доказательства лежит классический метод Хольмгрена.

Далее доказывается неразрешимость задачи Коши для «времяобразно» ориентированных поверхностей. При этом отмечается своеобразное свойство («когерентность», по терминологии автора), которым обладают значения решения и производных, входящих в данные задачи Коши. Свойство это заключается в том, что данные Коши в некоторой области D на начальной поверхности определяют значения этих данных в других точках начальной поверхности, не принадлежащих D. Если решение аналитического линейного уравнения определено по обе стороны от некоторой «времяобразно» ориентированной поверхности S, то на S «когерентны» значения одного только решения, а не всей совокупности данных Коши.

Во второй главе проводится новым способом построение фундаментального решения линейного эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами. Метод Йона является по существу обобщением, применительно к аналитическим уравнениям, метода разложения δ-функции по плоским волнам, который использовался различными авторами в случае уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Успехи матем. наук, 1955, 10, вып. 33—10, где указана литература по этому вопросу). Отметим, что в изложении Йона не возникает необходимости пользоваться аппаратом теории обобщенных функций. Далее автор исследует поведение фундаментального решения вблизи полюса и получает общее представление решения, имеющего изолированную особую точку типа полюса, через фундаментальное решение и его производные соответствующего порядка.

В третьей главе по известному методу Э. Э. Леви строятся фундаментальные решения для произвольных линейных эллиптических уравнений с неаналитическими, но достаточно гладкими коэффициентами. Указана также некоторая модификация этого метода, состоящая в том, что в качестве «параметрикса» используется фундаментальное решение аналитического уравнения, аппроксимирующего рассматриваемое уравнение с гладкими коэффициентами.

Последняя, четвертая глава посвящена вопросам дифференцируемости решений эллиптических уравнений с неаналитическими коэффициентами. Исследование основано на методе сферических средних, который дает возможность выражать последовательно старшие производные через младшие. Как указывает автор, этот метод при всей своей простоте заведомо не дает наилучших результатов.

Основные результаты первой и второй глав содержатся в ранее опубликованных работах автора (Communs Pure and Appl. Math., 1949, 2, 209—253; 1950, 3). Ссылки на работы других математиков, занимавшихся в последнее время изучением фундаментальных решений эллиптических уравнений и систем, весьма неполные. Л. А. Чудов

1436. Производные решений линейных эллиптических уравнений с частными производными. Йон (Derivatives of solutions of linear elliptic partial differential equations. John F.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 53—61 (англ.)

Краткое изложение доказательства теоремы о произвольной гладкости непрерывного обобщенного (удовлетворяющего интегральному тождеству) решения линейного эллиптического уравнения произвольного порядка с достаточно гладкими коэффициентами. Доказывается гладкость сферически осредненного решения, после чего решение выражается через свое осреднение. Подробное доказательство опубликовано автором ранее (РЖМат, 1955, 1235). А. Д. Мышкис

1437. Теоретико-функциональные свойства решений уравнений с частными производными эллиптического типа. Берс (Function-theoretical properties of solutions of partial differential equations of elliptic type. Bers L.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 69—94 (англ.)

В первой половине работы проводится обзор (с краткими доказательствами) свойств решений уравнения

$$\Delta\varphi + a\varphi_x + \beta\varphi_y = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты которого заданы в плоской области и удовлетворяют условию Гёльдера в каждой ее компактной части, одновременно с этим рассматриваются свойства псевдоаналитических функций, являющихся комплексными решениями уравнения $(w_x + iw_y)/2 = aw + b\overline{w}$, коэффициенты которого удовлетворяют тому же условию гладкости. Прежде всего, устанавливается тесная связь между этими двумя классами решений (что дает возможность из свойств псевдоаналитических функций вывести аналогичные свойства решений уравнения (1)), а также связь между псевдоаналитическими функциями. Доказывается теорема Карлемана о конечности порядка и дискретности нулей ненулевой псевдоаналитической функции, а также теорема о единственности решений уравнения (1), аналогичная классической теореме И. И. Привалова. Далее (в предположении, что $a(z)$ и $b(z)$ не слишком быстро растут у границы D) доказывается основной «принцип подобия»: любая псевдоаналитическая в D функция $w(z)$ представима в виде $e^{s(z)}f(z)$, где $f(z)$ аналитична в D, а $s(z)$ непрерывна в D; и обратно, для любой аналитической $f(z)$ существует так представимая псевдоаналитическая функция $w(z)$. Из этого принципа выводятся: вид и некоторые свойства фундаментального решения и функции Грина для уравнения (1); обобщение понятия гармонической меры с вытекающими из его применения следствиями; возможность геомеоморфного преобразования D так, чтобы заданное на D решение уравнения (1) перешло в гармоническую функцию; обобщение рядов Тейлора и Лорана для таких решений и т. д. (Подробные доказательства некоторых из этих утверждений имеются в других работах автора; см., в частности РЖМат, 1955, 755).

Во второй части работы формулируются без доказательства некоторые утверждения о решениях квазилинейного уравнения $A(p, q)r + 2B(\ )s + C(\ )t = 0$. Отметим, в частности: представление решений этого уравнения через псевдоаналитические функции; достаточные условия для того, чтобы всякое решение, существующее на всей плоскости, было линейным (обобщение теоремы С. Н. Бернштейна); достаточные условия для устранимости всякой изолированной особенности (причем решение даже может быть многозначным, но иметь однозначные производные); для существования на бесконечности предела любого решения, определенного вне достаточно большого круга и т. д. Указано применение к нелинейной краевой задаче газодинамики,

подробно разобранное в другой работе автора (РЖМат, 1956, 2239) А. Д. Мышкис

1438. О нелинейной граничной задаче для линейного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа. Накамори (Pri nelinea randoproblemo de linea laŭparta diferenciala ekvacio de elipsa tipo. Nakamori Kanzi), Yokohama Math. J., 1954, 11, № 2, 165—172 (эсперанто)

Рассматривается задача

$$\begin{cases} \Delta u + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y, u) \quad (\text{на } S) \end{cases} \tag{1}$$

в области T, ограниченной кривой Ляпунова S, где $\varphi(x,y,u)$ — непрерывная, неубывающая по u функция, причем $\lim_{u\to+\infty}\varphi(x,y,u)=+\infty$ и $\lim_{u\to-\infty}\varphi(x,y,u)=-\infty$. Коэффициенты $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и $f(x,y)$ вместе со своими первыми производными удовлетворяют в $T+S$ условию Гёльдера; $c(x,y)\leqslant 0$.

Методом продолжения по параметру доказывается существование решения задачи (1), имеющего вблизи заданной точки $(x_0, y_0)\in T$ особенность типа $\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. А. М. Ильин

1439. К теории проблемы Дирихле для нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений. Тауц (Zur Theorie des Dirichletschen problems bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen. Tautz Georg Lukas), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1955, 24, № 2, 421—442 (нем.)

В пространстве R^n рассматриваются области ω, ограниченные аналитическим контуром $Rd\omega$. Пусть C_k^{ω} — пространство k раз непрерывно дифференцируемых в ω функций. Через C_k^{σ} обозначается пространство функций, имеющих на $(n-1)$-мерной регулярной гиперповерхности производные по касательным направлениям до k-го порядка включительно. Автор ставит задачу, обратную задаче Дирихле для нелинейного эллиптического оператора.

Рассматривается оператор $R_{f;\,\omega}$, определенный на C_3^{σ}, удовлетворяющий следующим пяти постулируемым условиям:

1) для любой $F\in C_3^{\omega_0}$ найдется такая постоянная $M_F>0$, что для любых $\bar{\omega}\subset\omega_0$ и $f\in C_3^{\sigma}(\sigma=Rd\omega)$ такой, что $\|f-F\|_3^{\sigma}<M_F$, существует одно и только одно значение $R_{f;\,\omega}$, принадлежащее C_3^{ω} и принимающее на $Rd\omega$ значение f;

2) при любом F из рассматриваемого класса существует дифференциал

$$R^F_{\eta;\,\omega}=\left.\frac{\partial R_{F+\varepsilon\eta;\,\omega}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\quad(\eta\in C_3^{\sigma});$$

3) функция $R_{F+\varepsilon\eta}$ непрерывно дифференцируема по ε и по координатам и эти операции перестановочны;

4) для любой $F\in C_3^{\bar{\omega}}$ и любой области $\bar{\tau}\subset\omega$ должны быть справедливы неравенства

а) $\|R^F_{\eta;\,\omega}\|^{\bar{\omega}}\geqslant N\|\eta\|^{\sigma}$, б) $\|R^F_{\eta;\,\omega}\|_2^{\bar{\omega}}\leqslant N\|\eta\|_2^{\sigma}$

в) $\|R^F_{\eta;\,\omega}\|_2^{\bar{\tau}}<N_{\tau}\|\eta\|^{\sigma}$, где N и N_{τ} — некоторые постоянные;

5) $R^F_{\eta,\,\tau}$ удовлетворяет условию Липшица относительно F.

Автор утверждает, что $R_{f,\,\omega}$ является общим решением некоторого определенного нелинейного эллиптического уравнения $\Phi=0$ внутри области ω, принимающим значение f на границе ω. При этом строится с помощью результата Айзенштат (Уч. зап. Моск. ун-та, 1939, вып. 15,95—112) вариационное уравнение для дифференциала.

Проверку постулатов и некоторые детали доказательства автор откладывает до следующей работы.

Примечание референта. Включение пункта б) постулата 2 нецелесообразно, поскольку для линейных эллиптических уравнений этот факт в общем не имеет места. Пункт б) можно заменить, например, неравенством

$$\|R^F_{\eta;\,\omega}\|_2^{\bar{\omega}}\leqslant N\|\eta\|_3^{\sigma},$$

которое оставит справедливым рассуждения автора. А. И. Кошелев

1440. Ограниченность в L_p обобщенных решений эллиптических уравнений. Кошелев А. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 56

1441. Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Вольперт А. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 43—44

1442. Об асимптотических рядах для функций, встречающихся в теории дифракции волн относительно клиньев. Оберхеттингер (On asymptotic series for functions occurring in the theory of diffraction of waves by wedges. Oberhettinger F.), J. Math. and Phys., 1956, 34, № 4, 245—255 (англ.)

Рассматривается область, полученная удалением из пространства двугранного клина с углом раствора α, ось которого принята за ось цилиндрической системы координат. Изучается асимптотическое поведение в точке $P(\rho,\varphi,z)$ решения уравнения $\Delta u+k^2u=0$, удовлетворяющего на границе клина одному из условий $u=0$ или $\partial u/\partial\varphi=0$ в предположении, что невозмущенное поле порождается плоской волной, идущей из направления φ'.

Во всей области вне клина решение выражается простым образом через интегралы

$$I(\delta\alpha)=-\frac{1}{2\alpha}\alpha\sin\frac{\pi\delta}{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\exp(-ik\rho\operatorname{ch}x)\,dx}{\operatorname{ch}(\pi x/\alpha)-\cos(\pi\delta/\alpha)},$$

где $\delta=\pi\mp(\varphi-\varphi')$ и $\delta=\pi\mp(\varphi+\varphi')$.

Для функций $I(\delta\alpha)$ выводятся асимптотические формулы: при больших $k\rho$

$$I(\delta\alpha)=-\pi^{-1/2}\exp(-ik\rho\cos\delta+ i\pi/4)\operatorname{sgn}\delta S[(2k\rho)^{1/2}|\sin(\delta/2)|-(k\rho)^{-1/2}\exp(-ik\rho-i\pi/4)\times\sum_{n=0}^{\infty}i^{-n}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)[A_n(\delta,\alpha)-A_n(\delta,2\pi)-A_n(2\pi-\delta,2\pi)](k\rho)^{-n},$$

где $S(z)=\int_z^{\infty}\exp(-it^2)\,dt$, а $A_n(\delta,\alpha)$ — коэффициенты, выражающиеся через тригонометрические функции угла $\pi\delta/2\alpha$; при малых $k\rho$

$$I(\delta,\alpha)=\frac{1}{2}(\delta/\alpha-1)J_0(k\rho)-\alpha^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{i^{-n}\alpha J_n(k\rho)\frac{\sin n(\alpha-\delta)}{\sin n\alpha}-\pi\exp\left(\frac{1}{2}in\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)J_{n\pi/\alpha}(k\rho)\frac{\sin(n\pi\delta/\alpha)}{\sin(n\pi^2/\alpha)}\right\}.$$

В. К. Иванов

1443. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. Ландис Е. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 57—58

1444. Условия существования решения первой граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Лопатинский (Умови існування розв'язку першої граничної задачі для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу. Лопатинський Я. Б.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 1, 5—9 (укр.; рез. русс.)

При некоторых условиях гладкости коэффициентов и поверхности S выпуклой области D в D рассматривается эллиптический оператор

$$A \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + A_0(x).$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $A_{kl}(x) = A_{lk}(x)$, $A_k(x)$, $A_0(x)$ — квадратные матрицы порядка p и $\det \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(x) \times \alpha_k \alpha_l \neq 0$ при $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0$. Предполагается, что для любой точки $y \in S$ и произвольного единичного вектора τ, ортогонального к орту внутренней нормали $\nu(y)$

$$\det \operatorname{Res}_+ \left\{ \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(y) (\beta \nu_k(y) + \tau_k) (\beta \nu_l(y) + \tau_l) \right\}^{-1} \neq 0.$$

Здесь Res_+ — сумма вычетов во всех β-полюсах с положительными мнимыми частями.

Теорема. Необходимым и достаточным условием существования дважды непрерывно дифференцируемого в D, непрерывного в $D + S$ решения задачи

$$Au = 0, \quad u|_S = f$$

при произвольном непрерывном f является единственность нулевого решения сопряженной однородной задачи $A^* v = 0$, $v|_S = 0$ в классе непрерывно дифференцируемых в $D + S$ функций.

Отмечается непрерывная зависимость решений от заданных функций. М. Ш. Бирман

1445. Граничные свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Лопатинский (Граничні властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу. Лопатинський Я. Б.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 2, 107—112 (укр.; рез. рус.)

В статье общей теории потенциала для граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений (Лопатинский Я. Б., РЖМат, 1955, 3205) возникли вопросы о разрешимости этих задач и свойствах их решений. В реферируемой статье выяснен второй вопрос для систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в n-мерном пространстве применительно к задаче типа Дирихле для таких систем в следующей форме.

Пусть $A(x)$, $A_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $A_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — коэффициенты дифференциального оператора эллиптического типа

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A(x),$$

являющиеся матрицами порядка p, непрерывно дифференцируемыми соответственно $t, t+1, t+2$ раза $(t \geqslant 1)$ в области Ω точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть D — выпуклая область с t-кратно гладкой границей S, удовлетворяющей условиям Ляпунова; $D \cup S \subset \Omega$. Предполагается что: а) граничные задачи типа Дирихле для операторов $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и области D приводимы к регулярным интегральным уравнениям; б) при достаточно малом диаметре области D и сильной эллиптичности оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ задачи нахождения непрерывно дифференцируемых в $D \cup S$ решений уравнений $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$, $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$ $(x \in D)$, аннулирующихся на S, имеют единственное решение. В этих предположениях, пользуясь представлением ядра потенциала $G(x, y)$ для задачи типа Дирихле из предыдущей работы автора (реф. 1444), в которой доказана нормальная разрешимость таких задач, а также методом преобразования этого представления, приведенным в работе, указанной в начале реферата, автор доказал теорему о t-кратной непрерывной дифференцируемости в $D_0 \cup S_0$ решения уравнения $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$ $(x \in D_0)$, непрерывного в $D_0 \in S_0$, дважды непрерывно дифференцируемого в D_0, граничные значения которого t-кратно гладки на S_0, причем производные порядка t удовлетворяют условию Гельдера. D_0 — произвольная область с t-кратно гладкой границей S_0, удовлетворяющей условиям Ляпунова.

Приводится пример, иллюстрирующий существенность условий локальной однозначной разрешимости и регуляризуемости граничной задачи для справедливости теоремы.

Эта теорема обобщает теорему Жиро для одного уравнения второго порядка (Giraud G., Ann. scient. École norm. supér., 1929, ser. 3, 46, № 5, 131—245). Изучены свойства матрицы Грина задачи в связи с соответствующим интегральным уравнением.

Из представления ядра потенциала $G(x, y)$ автор выводит теорему о непрерывной (в метрике C) зависимости решения задачи от области и заданных на границе значений. Б. Р. Лаврук

1446. Системы эллиптических линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого и высших порядков с двумя независимыми переменными. Беккерт (Systeme partieller linearer elliptischer Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Beckert Herbert), Math. Nachr., 1954, 12, № 5—6, 257—272 (нем.)

Дополнение к работе автора (Math. Nachr., 1951, 5, 173—208), в которой исследуется система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k + f_i, \quad i = 1, \ldots, n = 2q, \tag{1}$$

при граничном условии вида

$$\sum_{k=1}^{2q} r_{ik}(s) u_k(s) = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q \tag{2}$$

(предполагается, что первые производные a_{ik}, b_{ik}, r_{ik} непрерывны по Гельдеру). Задача изучается в некоторой односвязной области, ограниченной замкнутой достаточно гладкой кривой; s — дуга. В упомянутой предыдущей работе для рассматриваемой задачи построена эквивалентная система сингулярных интегральных уравнений с главными значениями в смысле Коши. Как отмечает автор, его целью не является установление общих теорем существования, а только лишь общее обсуждение некоторых вопросов. Дается несколько замечаний о соотношениях между решениями соответствующих однородных интегральных уравнений и решениями первоначальной однородной задачи. Более систе-

матическое и четкое применение понятия индекса, разработанное в аналогичных целях в работах Н. И. Мускелишвили и И. Н. Векуа, привело бы, по-видимому, к более точным результатам.

Отмечается регулярность обобщенных решений системы (1) с аналитическими коэффициентами. Доказывается, что в этом случае всякое решение системы (1) аналитично, если 1) оно ограничено всюду и непрерывно по Гельдеру, всюду, за исключением конечного числа точек, 2) его первые производные суммируемы с квадратом и почти всюду удовлетворяют системе (1).

На примере общего линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными указывается общий путь сведения к системе (1) с граничным условием вида (2) общего дифференциального уравнения эллиптического типа и любого порядка с граничным условием вида $\sum c^{\alpha}_{i+t}(s)\dfrac{\partial^{n-1}u_i}{\partial x^r\,\partial y^t}+\cdots=0$. Имеются опечатки. Б. Боярский

1447. Об одной краевой задаче для распадающейся эллиптико-параболической системы уравнений с частными производными ДК 517, 946. Загорский Т. Я., Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1955, вып. 27, 99—108

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=a_i\Delta u_i+F_i\left((x,y,t,u_l,\ \frac{\partial u_l}{\partial x},\ \frac{\partial u_l}{\partial y}\right);$$
$$i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots,n+m \qquad (1)$$
$$\Delta u_j=F_j\left(x,y,t,u_i,\frac{\partial u_i}{\partial x},\ \frac{\partial u_i}{\partial y}\right),$$
$$j=n+1,\ldots,n+m, \qquad (2)$$

для которой ставится краевая задача

$$u_i=f_i(x,y)\ \text{при}\ t=0,\ (x,y)\in\sigma;$$
$$u_l(x,y,t)=\varphi_l(x,y,t),(x,y,t)\in C\times[0,T] \qquad (3)$$

$i=1,2,\ldots,n;\ \ l=1,2,\ldots,n+m$, где σ — плоская область, ограниченная кривой C непрерывной конечной кривизны. Эта задача решается методом последовательных приближений в предположении дифференцируемости $f_i(x,y)$, φ_l, F_l удовлетворяет условию Липшица по аргументам u_k, $\partial u_k/\partial x$, $\partial u_k/\partial y$. При этом используются оценки Жеврея (Gevrey, J. math., 1913) и Голузина (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, М.—Л., Гостехиздат, 1951) производных от функций Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа. Устанавливается единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1), (2), (3) от начальных и краевых условий. Автор замечает, что задача типа (1), (2), (3) встречается в приложениях. *Е. Д. Эйдельман*

1448. Граничные задачи для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости. Вольперт А. И., Науч. тр. Львовск. лесотехн. ин-та, 1954, **1**, 191—212

Для системы

$$\Sigma^2_{ij=0}A^{ij}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial y_j}=h(x),u=(u_1,\ldots,u_p),$$
$$A^{ij}=(a^{ij}_{kl}),\ k,\ l=1,\ldots,p, \qquad (1)$$

изучается краевая задача при граничном условии вида $\sum_{0\leqslant r+s\leqslant n}a^{rs}\dfrac{\partial^{r+s}u}{\partial x_1^r\,\partial x_2^s}+\cdots=f(t)$. Решение этой задачи сводится к решению эквивалентной задачи — системы сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши методом, аналогичным тому, который применял И. Н. Векуа для случая одного эллиптического уравнения (Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948). При этом используются фундаментальные матрицы системы (1), построенные Я. Б. Лопатинским (Укр. матем. ж., 1951, № 1, 3—38; № 3, 290—316; Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 5, 727—730 М. И. Вишик

1449. Сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений. Браудер (Strongly elliptic systems of differential equations. Browder F. E.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 15—51 (англ.)

Независимое изложение основных фактов теории систем уравнений с вещественными коэффициентами

$$K_i(U)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k_1,\ldots,k_s=1(s\leqslant 2m)}^{n}a_{k_1,\ldots,k_s;i,j}(x)\ \frac{\partial^s u_j}{\partial x_{k1}\ldots\partial x_{k_s}}=$$
$$=v_i(x)\,(i=1,\ldots,r), \qquad (1)$$

сильно эллиптических в смысле М. И. Вишика (Матем. сб., 1951, **29**, № 3, 615—676). Автор получает основные результаты М. И. Вишика, причем с помощью несколько более простого метода, а также некоторые смежные результаты. В основе лежит неравенство

$$\mathrm{Re}\,(-1)^m\sum_{j=1}^{r}\int_D K_j(\varphi)\,\overline{\varphi}_j dx\geqslant\rho_1\sum_{j=1}^{r}\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n}\int_D\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^m\varphi_j}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_m}}\right|^2 dx-\rho_2\sum_{j=1}^{r}\int_D|\varphi_j|^2\,dx$$

справедливое для системы (1), равномерно сильно эллиптической в ограниченной области D, если

$$a_{k;i,j}\in C^s(D)\cap C^{\max\{0,s-m\}}(\overline{D}),\ \varphi\in C_0^{\infty}(D),\ \varphi\not\equiv 0$$

в контурной полоске. На его основе осуществляется переход в гильбертово пространство. Обратный переход производится при помощи теоремы о регулярности обобщенных решений системы (1), очень близкой к теореме Фридрихса (РЖМат, 1955, 1234); для случая одного уравнения этот результат другим способом был получен автором ранее (РЖМат, 1953, 748). Краевое условие Дирихле задается при помощи функции $g\in C^m(D)$ и достигается в вариационном смысле. При таком определении доказываются основные результаты М. И. Вишика о фредгольмовости задачи Дирихле, о наличии первого случая альтернативы при достаточно малом размере D, об ограниченности снизу, дискретности и конечнократности спектра, а также о полноте системы собственных функций в случае самосопряженности оператора K. В заключение доказывается теорема о существовании и о свойствах функции Грина, обобщающая аналогичную теорему для одного уравнения, приведенную в указанной выше работе автора. А. Д. Мышкис

1450. К вопросу об обратной задаче теории потенциала. Лаврентьев М. М., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 3, 389—390

Обратная задача теории потенциала рассматривается обычно в следующей постановке: потенциал, возбуждаемый искомым телом, известен на некоторой замкнутой поверхности, заключающей внутри себя искомое тело (постановка 1). Автор рассматривает более общую постановку задачи: на некотором куске замкнутой поверхности, внутри которой лежит искомое тело, известны потенциал и его нормальная производная (постановка 2). Сведение второй постановки задачи к первой тесно связано с задачей Коши для уравнения

Лапласа. В частности, из устойчивости решения задачи Коши и возможности эффективного построения ее решения по приближенным данным следуют эти же результаты для второй постановки. В плоском случае устойчивость решения задачи Коши в классе ограниченных функций следует из результатов Карлемана. Метод приближенного построения ее решения указан ранее автором (РЖМат, 1957, 452). Автор приводит теорему, из которой для пространственного случая следует устойчивость решения задачи Коши в классе ограниченных функций для любой области, ограниченной достаточно гладкой поверхностью, при задании начальных данных на любом куске поверхности, ограниченном достаточно гладкой кривой. Ю. А. Шашкин

1451. Смешанные задачи для некоторых симметрических гиперболических систем. Дезин А. А., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 1, 13—16

В $(n+1)$-мерном кубе Ω, ограниченном плоскостями $x_\rho = 0$ и $x_\rho = a$ $(\rho = 0, 1, \ldots, n)$, рассматривается система

$$Eu \equiv \sum_{\rho=0}^{n} A^\rho(x) \frac{\partial u}{\partial x_\rho} + B(x)\, u = f, \qquad (1)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$; A^ρ и B — квадратные симметричные матрицы. При этом $A^\rho(x) \in C_1(\bar{\Omega})$, $B(x) \in C(\bar{\Omega})$, матрица $A^0(x)$ положительно определенная в $\bar{\Omega}$, а в $A^\rho(x)$ $(\rho = 1, \ldots, n)$ элементы $a^\rho_{kl} \neq 0$ лишь при $k = 1, \ldots, N-M-1$; $l = N-M, \ldots, N$; $0 \leqslant M \leqslant N-2$. Указанный класс включает системы Максвелла и Соболева (РЖМат, 1955, 232). Для системы (1) в Ω ставится смешанная задача при нулевых начальных и некоторых однородных граничных условиях. Сильным решением задачи называется $u \in L_2(\Omega)$, если $u = \lim u_i$, $f = \lim Eu_i$ в среднем по Ω, причем $u_i \in C_1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют начальным и граничным условиям. Вводятся также слабые (в обычном смысле) решения. Для сильных решений справедливо неравенство

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leqslant \gamma^2 \int_\Omega (Eu)^2\, d\Omega. \qquad (2)$$

Утверждается, что всякое слабое решение однородной сопряженной системы является сильным решением. Отсюда и из (2) вытекает существование и единственность сильного решения системы (1) (ср. Фридрихс К., РЖМат, 1956, 2217; Ладыженская О. А., РЖМат, 1956, 7371). При выполнении условий согласования вида $\overline{\partial^r f} / \partial x_0^r|_{x_0=0} = 0$ решение u и f имеют одинаковое число обобщенных производных по x_0. Подробные доказательства в работе не приводятся. Сообщается, что аналогичным путем исследован случай неоднородных начальных условий, а также система линеаризированных уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости.

М. Ш. Бирман

1452. Смешанная задача для линейных гиперболических систем на плоскости. Мышкис А. Д., Аболиня В. Э., Жданович В. Ф., Костюкович Е. Х., Лепин А. Е., Харитопенко П. И., Шлопак А. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 61—63

1453. Полевой метод в теории гиперболических систем дифференциальных уравнений математической физики. Аржаных И. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 42

1454. Вероятностный подход к уравнению теплопроводности. Дуб (A probability approach to the heat equation. Doob J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 216—280 (англ.)

Автор переносит на исследование задачи Дирихле для уравнения теплопроводности вероятностный метод, развитый им ранее (РЖМат, 1957, 664) для уравнения Лапласа. Наименование параграфов: Введение; Субпараболические и параболические функции: Броуновские траектории; Задача Дирихле для уравнения теплопроводности; Мартингалы и параболические функции; Граничные значения субпараболических и параболических функций; Локальная непрерывность субпараболических функций и утонченная топология; Свойства непрерывности субпараболических функций в целом; Теория потенциала; Множества абсолютной параболической меры 0; Граница множества; Уравнение $GV - \lambda V = 0$; Уравнение $GV = 1$; λ — субгармонические и λ — гармонические функции; Распределение первого момента встречи.

Субпараболические функции вводятся аналогично субгармоническим функциям, при помощи решения 1-й краевой задачи в прямоугольном параллелепипеде с ребрами, параллельными осям координат; эти функции в изучаемой области пространства (ξ, t) $(\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ должны быть полунепрерывны сверху и могут обращаться в $-\infty$ на множестве без внутренних точек. Рассматриваются простейшие свойства субпараболических функций (критерии, принцип максимума, построение при помощи теплового потенциала и т. д.). Далее вводится N-мерный броуновский процесс $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$, где x — случайная точка в N-мерном пространстве, т. е. функция $x(\omega; t)$ $(\omega \in \Omega)$, определенная при каждом $t \in (0, \infty)$ на пространстве Ω с вероятностной мерой P; при этом $x(0)=0$, процесс $x(t)$ гауссов и его компоненты $x^{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ попарно независимы, удовлетворяют условиям $E\{x^{(i)}(t)\} = 0, E\{|x^{(i)}(t) - x^{(i)}(s)|\} = |t-s|/2$ и функции $x^{(i)}(\omega; t)$ почти для всех ω непрерывны по t. Броуновская траектория $z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ с начальной точкой $z_0 = (\xi_0, t_0)$ вводится по формуле $z(t) = (\xi_0 + x(t),\ t_0 - t)$; $z(\infty)$ полагается равной (единственной) бесконечно удаленной точке $t = -\infty$. Если D — область с границей C и $z \in D$, то закон распределения первой точки $Z(z, C)$ встречи $z(t)$ с C определяет на C «параболическую меру относительно D в z». Если функция f определена на C и суммируема по этой мере относительно любой точки $z \in D$, то под решением задачи Дирихле в D понимается $u(z) = E\{f[Z(z, C)]\}$. Эта функция обязательно параболична в D. Понятие регулярности граничной точки вводится обычным образом. Доказывается, что точка $z_0 \in C$ регулярна тогда и только тогда, если почти все траектории $z(t)$, начинающиеся в z_0, встречают дополнение к D при произвольно малом $t > 0$. Далее выяснена естественная связь между субпараболическими функциями и решением задачи Дирихле. Введя процесс $z^*(t)$, получающийся из $z(t)$ остановкой точки $z(t)$ после встречи ее с C, автор проверяет, что процесс $\{u[z^*(t)];\ 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ представляет собой мартингал, а если субпараболическая функция, то при определенных предположениях — полумартингал. После проверки того, что решение задачи Дирихле удовлетворяет заданному граничному условию вдоль почти всех броуновских траекторий, вводится понятие обобщенного — стохастического граничного условия: для этого в каждой точке $z \in D$ задается случайная величина $\tilde{f}(z)$, причем при различных $z \in D$ величины $\tilde{f}(z)$ должны быть в определенной естественной связи друг с другом (переход от старого способа задания граничного условия к новому совершается по формуле $\tilde{f}(z_0) = f[z^*(\infty)]$. Теперь решение задачи Дирихле определяется по формуле $u(z) = E\{\tilde{f}(z)\}$, причем ряд основных свойств решения обычной задачи переносится на это обобщение. Однако это обобщение дает возможность различать различные подходы к C

(Мышкис А. Д. Матем. сб., 1949, 25, № 3, 387—414, 1950, 26, № 3, 341—344); отметим, в частности, такой результат: параболическая функция, мажорируемая решением стохастической задачи Дирихле, сама является решением некоторой другой стохастической задачи Дирихле. Далее автор проверяет, что субпараболические функции непрерывны справа и конечны вдоль почти всех броуновских траекторий, и в связи с этим вводит и изучает «утонченную топологию» в D, при которой все субпараболические функции непрерывны. При помощи теплового источника вводится функция Грина G, а с ней и тепловые потенциалы. Автор доказывает, что класс неотрицательных супернараболических функций, удовлетворяющих в определенном смысле нулевому стохастическому граничному условию, совпадает с классом потенциалов с неотрицательной плотностью, и получает еще некоторые результаты в этом направлении. Далее вводятся множества абсолютной параболической меры 0 как такие, которые при любом броуновском процессе не пересекаются при $t > 0$ почти всеми траекториями с началом в любой фиксированной точке. Эти множества имеют параболическую емкость 0 и являются множествами устранимой особенности. Переходя к рассмотрению границы области, автор более подробно рассматривает случай № 1, где устанавливает, в частности, что при определенных предположениях множество нерегулярных точек имеет параболическую меру 0, а потому несущественно при решении задачи Дирихле; однако в этом направлении окончательных результатов еще не получено. Уравнение $Cv - \lambda V = 0$ (λ комплексное) исследуется при помощи подстановки $u(z) = e^{\lambda t} v(z)$; в соответствии с характером функции u вводится класс λ-параболических и λ-субпараболических функций v, которые в случае независимости от t превращаются в λ-гармонические и λ-субгармонические функции. В заключение рассматривается закон распределения первой точки встречи броуновской траектории с данным началом с границей области, в частности, математическое ожидание времени выхода траектории в области); в частных случаях эти характеристики процесса могут быть подсчитаны эффективно.

А. Д. Мышкис

1455. **Интегрирование** тепловых уравнений со случайными начальными данными. **Кампе-де-Ферье** (L'intégration de l'équation de la chaleur pour des données initiales aléatoires. **Kampé de Fériet J.**, Mém. à hom. Radlos offerts M. Dimitri P. Riabouchinsky, Paris, Publ. Sci. Techn. Ministère Air., 1954, 153—169, 3000 fr.) (франц.)

Начальная (в) температура (н. р. т.) $F(x)$ ($-\infty < x < \infty$) [illegible] является стационарным процессом второго порядка, таким, что $M(F(x)) = 0$, $E(F(x)F(y)) = r(x, y)$.

Показывается (теорема 1), что для почти всех н. р. т. $F(x)$ функция $U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi, t) F(\xi)\, d\xi$, где $k(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/4t)$ является при $t > 0$ решением уравнения $U_t = U_{xx}$, для которого $\lim_{t \to +0} U(x, t) = F(x)$ для почти всех x. Кроме того (теорема 2), $E(U(x, t)) = 0$ и $E(U(x, t)\, U(y, s)) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y - \xi, t + s)\, r(\xi)\, d\xi$. Теорема 3 утверждает, что знание значений н. р. т. в конечном множестве точек x уменьшает в каждой точке (x, t), $t > 0$, дисперсию соответствующей $U(t, x)$ вокруг математического ожидания. В заключение доказывается (теорема 4), что независимо от «непрерывности» н. р. т. $F(x)$ соответствующая $U(x, t)$ стремится при $t \to \infty$ в среднем квадратичном к случайной величине Y, для которой $E(Y) = 0$, $E(Y^2) = V(+0)$, а $r(x) = \int_0^{\infty} \cos \lambda x\, dV(\lambda)$, $F(0) = 0$, $F(+\infty) < \infty$ и $V(\ ) = V(\lambda - 0)$.

K. Yosida

Перевод из Math. Revs. 1955, **16**, № 3, 268.

1456. **Мажоранты и миноранты для решений параболических уравнений.** **Пини** (Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche. **Pini Bruno**), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 37, 249—264 (итал.)

Назовем нормальной область D, определяемую неравенствами: $\chi_1(y) \leqslant x \leqslant \chi_2(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, где $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$ имеют непрерывные первые производные в $[a, b]$. Обозначим через S часть границы D,

$$S: x = \chi_1(y),\ x = \chi_2(y),\ y = b.$$

Непрерывная в области A функция $v(P)$ ($P \equiv (x, y)$) называется $\mathfrak{M}$-превалентной ($\mathfrak{M}$-субвалентной), если для любой нормальной области $D \subset A$ решение уравнения

$$\mathfrak{M}(u) = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y = 0$$

с граничным условием $u|_S = v|_S$ удовлетворяет неравенству $v(P) \geqslant u(P)$ ($v(P) \leqslant u(P)$). Аналогичным образом определяются $\mathfrak{M}^2$-превалентные ($\mathfrak{M}^2$-субвалентные) функции ($\mathfrak{M}^2 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial / \partial y)^2$). Устанавливается несколько критериев $\mathfrak{M}$-превалентности ($\mathfrak{M}$-субвалентности) и $\mathfrak{M}^2$-превалентности ($\mathfrak{M}^2$-субвалентности), вполне аналогичные известным критериям супергармоничности и субгармоничности.

Приведем два из них:

1. Для того чтобы $v(P)$, имеющая в A непрерывные производные, входящие в $\mathfrak{M}$, была $\mathfrak{M}$-превалентна ($\mathfrak{M}$-субвалентна), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}(v) \leqslant 0$ ($\mathfrak{M}(v) \geqslant 0$).

2. Обозначим через $C(P, r)$ линию уровня фундаментального решения уравнения теплопроводности,

$$C(P, r): \begin{cases} \xi = x + r\sqrt{2} \sin\theta \sqrt{-\log \sin^2 \theta}, \\ \eta = y + r^2 \sin^2 \theta, \end{cases} \quad |\theta| \leqslant \pi/2.$$

Положим

$$\mu_0(v, P, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} v|_{C(P,r)} \cos\theta \sqrt{-\log \sin^2 \theta}\, d\theta,$$

$$\mathfrak{M}_0''(v, P) = \overline{\lim}_{r \to 0} 3\sqrt{3}\, [\mu_0(v, P, r) - v(P)] / r^2,$$

$$\mathfrak{M}_0'(v, P) = \underline{\lim}_{r \to 0} 3\sqrt{3}\, [\mu_0(v, P, r) - v(P)] / r^2.$$

Для того чтобы непрерывная в A функция $v(P)$ была $\mathfrak{M}$-превалентной ($\mathfrak{M}$-субвалентной), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}_0''(v, P) \leqslant 0$ ($\mathfrak{M}_0'(v, P) \geqslant 0$).

Л. Н. Слободецкий

1457. **О методе фундаментальных решений в теории параболических систем.** **Эйдельман С. Д.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 72—73

1458. **Некоторые смешанные задачи для параболических систем.** **Загорский Т. Я.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I, М., АН СССР, 1956, 54—55

1459. **Некоторые неравенства для собственных функций.** **Эйдус Д. М.**, Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 6, 796—798

Пусть Ω — конечная область m-мерного пространства, ограниченная достаточно гладкой поверхностью Ляпунова S; $u_n(x)$ и λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ — нормированные

собственные функции и собственные числа задачи $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_S = 0$; $D^k u_n(x)$ — производная k-го порядка. Доказывается: а) неравенство

$$|D^k u_n(x)| \leqslant C_k \lambda_n^{(n-1)/4+k/2} (\ln \lambda_n)^{1/2} \qquad (1)$$

справедливо для всей области Ω и тех n, для которых $\lambda_n > 1$; б) для всякой подобласти Ω', лежащей с границей в Ω, имеет место

$$|D^k u_n(x)| \leqslant C'_k \lambda_n^{(m-1)/4+k/2},$$

где C'_k зависит от выбора Ω'.

Эти результаты сильнее аналогичных, полученных как самим автором (РЖМат, 1953, 1208), так и др. В статье, в показателе формулы (1) пропущено слагаемое $k/2$. Х. Л. Смолицкий

1460. Качественные свойства решений некоторых смешанных задач и спектральные разложения по собственным функционалам. Александрян Р. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 42

1461 К. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Бернштейн С. Н., Ред. Ахиезер Н. И., Харьков, Харьковск. ун-т, 1956, 95 стр., 3 р. 15 к.

1462 Д. Задача, обратная задаче Коши — Ковалевской, для некоторых классов уравнений в частных производных. Шитяков М. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1956

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

1463. Дифференциальные уравнения движения, системы. Письм. лекции. Королю О. Е., Ленингр. заоч. индустр. ин-т, Л., 1956, 32 стр., илл., беспл.

1464. Решения II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, принятые 4 декабря 1953 г., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автомат. регулирования, 3, М.—Л., 1955, 183—190

Отражена тематика совещания (РЖМат, 1957, 4284К). Подводятся основные итоги развития теории автоматического регулирования за последние 15 лет, сгруппированные в основном вокруг следующих проблем: 1) устойчивость и периодические режимы, 2) качество регулирования и динамическая точность, 3) экспериментальные методы исследования систем автоматического регулирования.

В решениях не отражен ряд направлений теории автоматического регулирования (теория самонастраивающихся систем, теория систем, включающих математические вычислительные машины, системы дискретного действия и т. п.), которые появились в последнее время. З. Лилов

1465. О связи устойчивостей разомкнутой и замкнутой динамических систем. Неймарк Ю. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 63

1466. Поперечные колебания стержня с малой массой в переходном режиме вращения. Моссенков Б. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 224—225

1467. Об одном приближенном решении задачи о чисто пластическом состоянии диска. Курдин Н. С., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1956, № 8, 117—119

1468. Точное решение одной задачи об установившемся движении грунтовых вод в вертикальной плоскости со свободной поверхностью и участком высачивания. Михайлов Г. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 205—206

1469. Детерминированная модель простой эпидемии в случае более чем одной общины. Рашевский, Мautner (The deterministic model of a simple epidemic for more than one community. Rushton S., Mautner A. J.), Biometrica, 1955, 42, № 1-2, 126—132 (англ.)

Рассматривается модель простой эпидемии в случае m общин. Пусть y_i — число здоровых лиц в i-й общине в момент времени t, n_i — ее объем.

Предполагая: 1) существование однородного смешения заразных и здоровых лиц внутри каждой общины; скорость распространения инфекции в i-й общине α_i; 2) существование однородного смешения между общинами; скорость распространения инфекции между i-й и j-й общинами β_{ij}, получаем систему дифференциальных уравнений для y_i

$$dy_i/dt = -y_i \left\{ (n_i - y_i)\alpha_i + \sum \beta_{ij}(n_j - y_j) \right\}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

С использованием функций матриц строится полное решение этой системы в параметрической форме при следующих упрощающих предположениях: для всех i $n_i = n$, $\alpha_i = \alpha$ и для $i \neq j$ $\beta_{ij} = \alpha\gamma$.

Решение в квадратурах дается для случая, когда некоторое количество зараженных лиц появляется первоначально в одной общине ($y_1^0 = \ldots = y_{i-1}^0 = y_{i+1}^0 = \ldots = y_m^0 = n$, $y_i^0 < n$), и рассматриваемая система сводится к системе двух уравнений. При всех вышеуказанных предположениях и при числе общин, равном двум, приводится анализ результатов и даются графики. И. Л. Канторович

1470. Вывод закона притяжения Ньютона на основе свойств группы Галилея. Фантаппье (Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprieta del gruppo di Galilei. Nota I del Corrisp. Fantappiè Luigi), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 4, 361—367 (итал.)

Показывается, что нет необходимости в каком-либо объяснении закона притяжения Ньютона, выражаемого известной формулой

$$F = kmm'/r^2,$$

где F — сила, с которой притягиваются две материальных точки с массами m и m', r — расстояние между ними, k — постоянная. Этот закон не может быть изменен в рамках классической механики, потому что он является следствием того, что группа, определяющая равенство двух физических явлений, является группой Галилея. Ю. А. Митропольский

1471. Вывод закона притяжения Ньютона на основе свойств группы Галилея. Фантаппье (Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprieta del gruppo di Galilei. Nota II del Corrisp. Fantappiè Luigi), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 5, 458—461 (итал.)

Продолжение предыдущей работы (реф. 1470). Рассматриваются формы различных возможных законов притяжения, совместимых с условиями, приведенными в предыдущей работе автора. Ю. А. Митропольский

1472. Об одном применении уравнений возмущенного движения к задаче трех тел в постановке Радзиевского. Михайлович (Једна примена једначина теорије поремећаја на проблем трију тела Радзиевског. Михаиловић Добривоје), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 3—4, 223—228 (серб.; рез. нем.)

Задача Радзиевского об относительном движении двух тел, притягивающихся по закону Ньютона в однородном гравитирующем облаке, рассматривается как

задача о возмущенном движении с пертурбационной функцией

$$R = -kr^2/2,$$

где k — коэффициент пропорциональности закона Гука. Эта задача решается по методу вариации произвольных постоянных в некоторой специальной системе векторных элементов. Г. А. Мерман

1473. Об ограниченной задаче трех тел. Стеффенсен (On the restricted problem of three bodies. Steffensen J. F.), Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1956, **30**, № 18, 17 p. (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел:

$$\frac{d^2p}{dt^2} - 2N\frac{dq}{dt} + Mp(r^{-3} - 1) + (p-1)(s^{-3} - 1) = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2N\frac{dp}{dt} + Mq(r^{-3} - 1) + q(s^{-3} - 1) = 0,$$

где $r^2 = p^2 + q^2$, $s^2 = r^2 + 1 - 2p$, $N^2 = M + 1$, p, q — декартовы координаты тела бесконечно малой массы во вращающейся системе координат, ось p проходит через тела конечной массы M и 1, находящиеся на расстоянии 1 друг от друга и равномерно вращающиеся с угловой скоростью N.

Обозначая

$$X = r^{-3} - 1, \quad Y = s^{-3} - 1,$$

автор получает систему

$$r\frac{dX}{dt} + 3(X+1)\frac{dr}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} - 2N\frac{dq}{dt} + MpX + pY - Y = 0,$$

$$s\frac{dY}{dt} + 3(Y+1)\frac{ds}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2N\frac{dp}{dt} + MqX + qY = 0.$$

Решение ищется в виде рядов

$$p = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu, \quad q = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu, \quad r = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu,$$

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu t^\nu, \quad X = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu t^\nu, \quad Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu t^\nu.$$

Исследуя рекуррентные соотношения между коэффициентами, автор выводит оценку

$$|a_\nu| \leqslant AK_\nu, \ |b_\nu| \leqslant BK_\nu, \ |c_\nu| \leqslant CK_\nu, \ |d_\nu| \leqslant DK_\nu,$$
$$|e_\nu| \leqslant EK_\nu, \ |f_\nu| \leqslant FK_\nu,$$

где $K_\nu = \lambda^\nu / \nu(\nu+1)$, $A, B, C, D, E, F, \lambda$ — некоторые постоянные, откуда следует сходимость написанных рядов при $|t| \leqslant 1/\lambda$. Г. А. Мерман

1474. Асимптотическое решение некоторых дифракционных задач. Келлер, Льюис, Секлер (Asymptotic solution of some diffraction problems. Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D.), Communs. Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 2, 207—265 (англ.)

Для больших значений волнового числа ($k \to \infty$) решение волнового уравнения $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ ищется в асимптотической форме

$$u \sim e^{ik\psi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x, y, z)}{(ik)^n},$$

что дает уравнение эйконала для фазы $(\nabla\psi)^2 = 1$ и рекуррентную систему дифференциальных уравнений для функций v_n. Решение последней вдоль луча имеет вид

$$v_n(s) = v_n(s_0)\,[G(s)/G(s_0)]^{1/2} - \frac{1}{2}G^{1/2}(s) \times$$
$$\times \int_{s_0}^{s} G^{-1/2}(\tau)\,\nabla^2 v_{n-1}(\tau)\,d\tau,$$

где G — кривизна фронта волны в точке луча.

С помощью этих уравнений рассмотрен ряд двумерных и трехмерных диффракционных задач с граничными условиями $u = 0$ и $\partial u/\partial\nu = 0$ на поверхности. Разобраны следующие задачи: диффракция плоской волны на полуплоскости, клине, параболическом цилиндре, конусе, параболоиде вращения, круговом цилиндре, сфере; поле линейного источника, находящегося в фокусе параболического и гиперболического цилиндров; поле точечного источника, находящегося в фокусе параболоида и гиперболоида вращения. Кроме того, рассмотрены поля линейного и точечного источников над плоской границей раздела двух сред и задача о диффракции плоской волны на параболическом и круговом цилиндрах с импедансным граничным условием $\partial u/\partial\nu = ikZu$ на их поверхности. М. Л. Левин

1475. Диффракция цилиндрического импульса на полуплоскости. Тернер (The diffraction of a cylindrical pulse by a half-plane. Turner Robert D.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 1, 63—73 (англ.)

С помощью одностороннего преобразования Лапласа и интегрального преобразования Конторовича — Лебедева, модифицированного Гринбергом, строится функция Грина — решение неоднородного двумерного волнового уравнения

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\delta(r - r_0)\,\delta(\theta - \theta_0)\,\delta(t - 0^+)}{r_0}$$

(r, θ — полярные координаты на плоскости), удовлетворяющее граничным условиям: $\varphi = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ и начальным условиям: $\varphi = 0$, $\partial\varphi/\partial t = 0$ при $t = 0$. Полученное решение содержит медленно сходящийся ряд. М. Л. Левин

1476. Неустановившееся обтекание сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости в приближении Озена. Долматов К. И., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 79—86

Рассматривается кинематическая задача неустановившегося обтекания неподвижной сферы радиуса a, когда скорость «главного движения» в приближении Озена есть постоянная C. Благодаря симметричности потока относительно оси x, проекция вихря $\omega_x = 0$, а $\omega_y = -\partial\psi/\partial z$, $\omega_z = \partial\psi/\partial y$, поэтому проекции скорости на координатные оси выражаются при помощи двух функций $F(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$\partial\psi/\partial t + C\partial\psi/\partial x = \nu\Delta\psi, \quad \Delta F = \partial\psi/\partial x,$$

которые интегрируются операционным методом. Уравнения, полученные в области изображений, решаются разложением в ряд по шаровым функциям.

В конце работы дается предельное значение решения при $t \to \infty$, приближенное значение которого с точностью до первой степени числа Рейнольдса совпадает с известным решением задачи Стокса. Д. Е. Долидзе

1477. К влиянию экрана на перенос солей в жидкостях. Чиркин М. П., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 121—125

Рассматривается одномерное уравнение диффузии

$$\partial c / \partial t = D\partial^2 c / \partial y^2 - v_y \partial c / \partial y$$

для полуограниченной системы, состоящей из двух сред: чистой воды и воды в песке. Границей системы служит слой соли, в котором процесс не рассматривается, а заменяется краевым условием на границе системы. Приведен также пример упрощенного расчета засоления плоского потока. Каких-либо новых математических результатов не получено, однако разобранные в работе примеры могут служить интересной иллюстрацией задач, рассматриваемых в курсе уравнений в частных производных. Ю. Н. Днестровский

1478. О свободных колебаниях механической системы с одной степенью свободы. Капра (Sulle vibrazioni libere di un sistema meccanico ad un grado di libertà. Capra Vincenzo), Rend. Seminar. mat. Univ. a Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 307—325 (итал.)

Изучаются свободные псевдогармонические колебания механической системы, описываемые дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2h(\dot{q})\dot{q} + \sigma^2 f(q) = A(t), \qquad (1)$$

где $f(q)$ — может быть неаналитической функцией. Определяются периодические решения уравнения (1) для случая

$$\sigma^2 = 1, \quad h(\dot{q}) = 0, \quad A(t) = 0.$$

Приводятся формулы и оценки для периода колебания и амплитуды. Ю. А. Митропольский

1479. Применение теоремы Мауро Пиконе к теплопроводности. Эванс (An application of the Mauro Picone theorem for heat conduction. Evans George W. II), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 961—968 (англ.)

Рассматривается работа прибора, контролирующего температуру внутренней части стенки печи и тепловой поток через эту стенку, нагреваемую снаружи. Принимается, что распределение температуры внутри стенки определяется решением одномерного уравнения теплопроводности. В стационарном режиме имеем $u(x, t) = Ax + U$ и желательно управлять печью так, чтобы было $u(0, t) = U$, $\partial u / \partial x = A$ $(0 < x < a)$. Контрольный прибор должен работать так, чтобы при различном увеличении (уменьшении) температуры при $x = 0$ [$u(0, t) \geqslant U + \varepsilon$, $(u(0, t) \leqslant U - \varepsilon)$], или при отсутствии такого увеличения (уменьшения), но при различимом увеличении (уменьшении) перепада против aA [$u(0, t) < U + \varepsilon$, но $\delta u \geqslant aA + \gamma$, $(u(0, t) > U - \varepsilon$, но $\delta u \leqslant aA - \gamma)$] температурный градиент при $x = a$ уменьшился бы (увеличился бы) на величину $\sigma > 0$ по сравнению с A [$u_x(a, t) = A - \sigma$, $(u_x(a, t) = A + \sigma)$]. Используя принцип максимума для параболического уравнения в форме, данной Пиконе (Picone M., Math. Ann., 1929, 101), автор показывает, что контрольный прибор будет поддерживать температуру $u(x, t)$ в границах

$$Ax + U - (\varepsilon + \gamma) \leqslant u(x, t) \leqslant Ax + U + (\varepsilon + \gamma),$$

если при $t = 0$ она находилась в тех же границах.

Здесь ε — точность определения температуры $u(0, t)$ внутренней стенки, а γ — точность определения перепада температур $\delta u = u(a, t) - u(0, t)$. Х. Л. Смолицкий

1480. Задача с подвижной границей для уравнения теплопроводности с приложением к проблемам фазовых изменений. Колоднер (Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. I. General method of solution. Kolodner I. I.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 1, 1—31 (англ.)

Решение уравнения теплопроводности ищется в области D_R, ограниченной характеристикой $t = \bar{t}$ и дугами AC и AB. Дуга AC задана; дуга AB представляется уравнением $x = R(t)$. Требуется найти $R(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$ и $u(x, t) = u(P)$, $P \in D_R$, удовлетворяющие уравнению

$$Lu = u_{xx} - u_t = 0 \qquad (1)$$

и условиям:

$$\Gamma(u) = 0 \text{ на дуге } AC, \qquad (2)$$

$$u(R, t) = f(t) \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}, \qquad (3)$$

$$u_x = (R, t) = g(t) \text{ для } 0 < t \leqslant \bar{t}. \qquad (4)$$

Оператор Γ, функции $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям, необходимым для существования и единственности решения задачи.

Если возможно в конечном виде найти функционал $u[R, t]$, удовлетворяющий уравнению и условиям (2) и (3), то подставляя его в условие (4), получим функциональное уравнение для определения $R(t)$. Однако это не всегда возможно.

Другой способ решения состоит в следующем. Обозначим через D_R^+ область D_R и через D_R^- область точек, удовлетворяющих условиям: $x < R(t)$, $0 < t \leqslant \bar{t}$. Продолжим решение $u(P)$ в область D_R^-, положив $u(P) \equiv 0$, $P \in D_R^-$. Тогда $u(P)$ будет обладать следующими свойствами:

$$(A) \quad \begin{cases} L(u) = 0, & P \in D_2^- \cup D_R^+, \\ \Gamma(u) = 0 & \text{на дуге } AC, \\ u(x, 0) = 0 \quad \text{для} & x < a, \\ [u] = f(t), & 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}, \\ [u_x] = g(t), & 0 < t \leqslant \bar{t}, \end{cases}$$

Где [ ] обозначает скачок вдоль линии $x = R(t)$.

Обозначим через $u^\rho(x, t)$ решение задачи (А), когда кривая $R(t)$ заменена фиксированной, но произвольной кривой $x = \rho(t)$, подчиненной условию $(\rho') \leqslant At^{-1/2}$; $\rho(0) = a$ и произвольная $\rho'(t)$ имеет конечное число особых точек.

Пусть $\bar{D}_\rho^\pm$ есть замыкание $D_\rho^\pm$ в множестве $\bar{E}$ [$-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, $(x - a) + (t) > 0$]. Определим $u^{\rho\pm}(P)$, $P \in \bar{D}_\rho^\pm$ как

$$u^{\rho\pm}(P) = \lim_{Q \to P} u^\rho(Q), \; Q \leqslant D_\rho^\pm.$$

В случае существования и единственности $u^{\rho\pm}$, удовлетворяющего дополнительным условиям

$$|u^{\rho\pm}| \leqslant A, \; |\sqrt{t}\, u_x^{\rho\pm}| \leqslant A, \; u^{\rho\pm}(-\infty, t) = 0,$$

имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Если задача с подвижной границей имеет решение

$$u(P), R(t), P \in D_R^+, \text{ то } u = u^R, P \in D_R^+$$

и $R(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$u^{R+}(R, t) = f(R), \; R(0) = a, \qquad (5)$$

$$u_x^{R+}(R, t) = g(R), R(0) = a, \qquad (6)$$

Теорема 2 (единственности). Если каждое из уравнений (5), (6) имеет не больше одного решения, то задача с подвижной границей имеет не больше одного решения.

Вспомогательный функционал u^0 строится с помощью потенциалов простого и двойного слоя.

В случае, когда D_ρ^+ есть E_ρ^+, т. е. когда дуга AC [illegible] с осью x-ов для $x > a$ и Γ есть тождественный оператор, решение состоит только из так называемой «фундаментальной части» v^0, являющейся решением задачи (A), при краевых условиях: $v^0(x, 0) = 0$, $x > a$, $v^0(\infty, t) = 0$.

Доказывается, что единственное решение этой задачи имеет вид: $v^0 = D^0(f) - S^0[g + f\rho']$, где S^0 и D^0 — потенциалы простого и двойного слоев, расположенных [illegible] $x = \rho(t)$.

В общем случае вспомогательный функционал состоит из фундаментальной части v^0 и дополнительной части w^0:

$$u^0 = v^0 + w^0, \quad P \in D_\rho^- \cup D_\rho^+.$$

Условия, наложенные на w^0, следуют из условий, наложенных на u^0 и свойств v^0.

Решение задачи с подвижной границей сводится к решению следующих функциональных уравнений для границы:

$$v^0(\rho, t) - f[\rho]/2 + w^0(\rho, t) = 0, \tag{7}$$

$$v_x^0(\rho, t) - g(\rho)/2 + w_x^0(\rho, t) = 0, \tag{8}$$

$$\rho'(t)\, v^0(\rho, t) + 2v_x^0(\rho, t) - \frac{1}{2}[\rho'(t) f(t) + 2g(t)] + \rho' w^0(\rho, t) + 2w_x^0(\rho, t) = 0. \tag{9}$$

Пусть R_1, R_2, R_3 при соответствующих условиях представляют решения этих уравнений. Доказываются теоремы:

Теорема 3. Если $R_1(t)$ существует для $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, то $R(t) = R_1(t)$,

$$u(x, t) = u^{R_1+}(x, t), \quad P \in D_{R_1}^+,$$

является решением задачи с подвижной границей.

Теорема 4. Если $R_2(t)$ существует для $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$ и $R_2'(t) \leqslant 0$, то $R(t) = R_2(t)$, $u(x, t) = u^{R_2+}(x, t)$, $P \in D_{R_2}^+$ является решением задачи с подвижной границей.

Теорема 5. Если $R_3(t)$ существует для $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, то $R(t) = R_3(t)$, $u(x, t) = u^{R_3+}(x, t)$, $P \in D_{R_3}^+$ является решением задачи с подвижной границей.

Рассмотрено приложение изложенного метода к решению следующих физических задач: 1) о движении поверхности раздела жидкость — газ, 2) об испарении или росте жидкой капли, 3) о поведении облака, 4) о растворении пузырьков газа в жидкости, 5) о рекристаллизации, 6) о замерзании озера конечной глубины, 7) о затвердевании земной коры. В. И. Беляев

1481. **О некоторых методах расчета пологих оболочек.** Шаишмелашвили В. Н. (საქართველოს სსრ მეცნ. აკად. სამშენებლო საქმის ინსტ. შრ.), Тр. Ин-та строит. дела. АН Груз ССР, 1955, 5, 21—54

Рассматриваются варианты решения уравнений упругих пологих оболочек: 1) сведение к интегро-дифференциальным уравнениям при помощи функции Грина плоской задачи, решаемым методом последовательных приближений, 2) метод сетки с использованием матриц влияния теории изгиба пластин, 3) метод полос, сводящий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; обсуждаются различные возможности решения последней задачи.

В качестве примера излагается расчет методом сетки, защемленной по контуру, квадратной в плане сферической оболочки при симметричной нагрузке. Приводятся численные результаты. Н. А. Алумяэ

1482. **Об одной задаче теории глубинного насоса.** Бабуков А. Г., Докл. АН СССР, 1955, 108, № 1, 39—42

Задача о продольных колебаниях штанги ($u_1(x, t)$) и трубы ($u_2(x, t)$) глубинного насоса приближенно сводится к следующей. Найти непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ решение системы уравнений $u_{tt}^{(j)} + \eta u_t^{(j)} = a^2 u_{xx}^{(j)}$ ($j = 1, 2$; $\eta = \text{const} > 0$), для которого $u^{(j)}(x, t + T) = u^{(j)}(x, t)$ ($T > 0$), $u^{(1)}(0, t) = f(t)$, $u^{(2)}(0, t) = 0$; на каждом из промежутков $t_0 < t < t_1$, $t_2 < t < t_3$ $\mu_1 u_x^{(1)}(l, t) + \mu_2 u_x^{(2)}(l, t) = P(t)$ и разность $u^{(1)}(l, t) - u^{(2)}(l, t)$ постоянна: $\mu_1 u_x^{(1)}(l, t) = P(t)$, $u_x^{(2)}(l, t) = 0$ ($t_1 < t < t_2$); $u_x^{(1)}(l, t) = 0$, $\mu_2 u_x^{(2)}(l, t) = P(t)$ ($t_3 < t < t_0 + T$); $\mu_1 \mu_2 = \text{const} > 0$, $f(t)$, $P(t)$ заданы; $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_0 + T$.

Заменой переменных (вводятся новые искомые функции) эта задача приводится к задаче, почти не отличающейся от рассмотренной автором ранее (РЖМат, 1953, 261). Как и в предыдущей работе, обоснование метода не дано. Сообщается, что этим методом вычислена кривая $u^{(1)}(l, t)$ по данным одного из опытов А. Н. Адонина (И. А. Чарный, А. И. Фрейдензон, Ц. Т. Арустамова, Изв. АН СССР, ОТН, 1949, № 6, 855—875) и что числа, входящие в граничные условия, приближенно определялись из условий $u_t^{(1)}(l, t_0) = u_t^{(1)}(l, t_2) = 0$; $\mu_1 u_x^{(1)}(l, t_1) = P(t_1)$; $u_x^{(1)}(l, t_3) = 0$. Автор не объясняет, как получены те сведения об искомой функции $u^{(1)}(x, t)$, которые, очевидно, надо иметь до решения задачи, чтобы воспользоваться указанными условиями. Имеются опечатки.

Примечание референта. В силу граничных условий имеем $\mu_1 u_x^{(1)}(l, t) = P(t)$ на всем промежутке $t_1 < t < t_2$, поэтому непонятно, как из условия $\mu_1 u_x^{(1)}(l, t_1) = P(t_1)$ можно определить t_1. То же относится и к t_3. А. М. Родов

1483. **О функциях Грина для упругих пластинок с закрепленными, опертыми и свободными краями.** Плейель (On Green's functions for elastic plates with clamped, supported and free edges. Pleijel Ake), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 413—437 (англ.)

Пусть V — односвязная область на плоскости, ограниченная достаточно регулярной кривой S, точки $p, q \in V$, а $s \in S$. Изучается поведение в окрестности границы S регулярной части $\gamma(p, q)$ функции Грина $G(p, q)$ для бигармонического уравнения $\Delta\Delta u = 0$ в области V при граничных условиях на S, соответствующих задачам для упругой пластинки с закрепленными, опертыми или свободными краями. Функции $\gamma(p, q)$ для трех указанных проблем находятся при помощи решений интегральных уравнений, получаемых и исследуемых способом аналогичным методу потенциалов в решении задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа.

Пусть D и D^n обозначают частные производные по переменным x и y соответственно первого и n-го порядков. Показано, что для всех рассматриваемых задач

$$\gamma(p, q) = O(1), \quad D\gamma(p, q) = O(1),$$

$D^2\gamma(p, q) = O(\log R(p, q))$, $D^{k+2}\gamma(p, q) = O(R^{-k}(p, q))$, $k > 0$,

где $R(p, q) = \min_{s \in S}(r_{ps} r + q_s)$, а r_{ps} — расстояние между точками p и s. Д. Ф. Харазов

1484. Дополнение к решению магнито-гидродинамической задачи. Нардини (Completamento della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nardini Renato), Ann. Univ. Ferrara. 1952—1953, Sez. VII, 2, 17—33 (итал.)

Пусть идеальная несжимаемая электрически проводящая жидкость занимает полупространство $z > 0$. В момент времени $t = 0$ она движется со скоростью $\mathbf{v}(z)$ перпендикулярно оси z и находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, параллельном оси z. Тогда для $t > 0$ внутри жидкости возникает дополнительное магнитное поле, напряженность которого, перпендикулярная оси z, является функцией z и t. Значение напряженности этого поля на плоскости $z = 0$ считается известной функцией времени t. Задача заключается в том, чтобы найти скорость жидкости, давление, напряженность магнитного поля как функции от координаты z и времени t. Она сводится к решению математически не связанных уравнений для компонент магнитного поля, например для компоненты по оси x.

$$\partial^2 H / \partial t^2 = \frac{\partial^3 H}{\partial t\, \partial u^2} + c\partial^2 H / \partial u^2;\ u = \text{const} \cdot z$$

с начальными условиями:

$$\lim_{t \to +0} H(u, t) = 0\ u > 0,$$

$$\lim_{t \to +0} \partial H(u, t) / \partial t = \varphi(u),$$

и условиями на границе жидкости:

$$\lim_{u \to +0} H(u, t) = G(t);\ \lim_{u \to \infty} H(u, t) = 0,\ t > 0.$$

В предыдущей работе автора (Ann. mat., 1953) задача была решена для частного случая, когда $\varphi(u) \equiv 0$. В настоящей работе задача решается в предположении $G(t) \equiv 0$, $\varphi(u)$ непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема в интервале $(0, \infty)$. Формальное решение получается с помощью преобразования Лапласа, а затем доказывается, что оно удовлетворяет уравнению и начальным условиям, доказывается также единственность решения. Показывается, что сумма двух решений рассмотренных частных задач является решением общей задачи. П. П. Бирюлин

1485. Об одной математической задаче из гидродинамической теории возмущений. Хёйланд (Et matematisk problem fra den hydrodynamiske perturbasjonsteori. Höiland Einar), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 101—104 (норв.)

Отыскание функции тока $\psi(z, t) = Z(z) e^{-ik\zeta t}$ в рассматриваемой задаче сводится к решению уравнения

$$Z'' - k^2 Z + \frac{c}{(z - \zeta)^2} Z = 0$$

с граничным условием $Z(-1) = Z(1) = 0$. Решение полученной задачи имеет вид

$$Z_q = [ik(z - \zeta_q)]^{1/2} C_\nu [ik(z - \zeta_q)],$$

где C_ν — бесселева функция порядка $\nu = \sqrt{1/4 - r}$, а ζ_q — собственное значение. Собственные функции Z_q удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{(z - \zeta_n)^2 (z - \zeta_m)} + \frac{1}{(z - \zeta_n)(z - \zeta_m)^2} \right] Z_n Z_m dz = 0,\ n \neq m,$$

с помощью которого в разложении

$$\psi(z, t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q Z_q e^{-ik\zeta_q t} \qquad (1)$$

из начальных условий могут быть определены коэффициенты a_q. Для $-3/4 < r < 1/4$ $(0 < \nu < 1)$ решения Z_q теряют физический смысл ввиду наличия у них особенностей. Тогда вместо разложения (1) используется интегральное представление функции $\psi(z, t)$.

В. И. Левин

1486. О распространении плоских волн в движущихся проводниках. Манарини (Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto. Manarini Anna Marisa), Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 2, 229—231 (итал.)

Рассматривается плоская волна, распространяющаяся в равномерно движущемся проводнике, перпендикулярно его движению. Применением преобразований Лоренца находится связь между частотой колебаний поля и волновым числом в системе координат, относительно которой равномерно движется проводник.

П. П. Бирюлин

1487. О моделировании пространственных полей плоским полем тока. Гладыш, Рыбарский (O modelowaniu przestrzennych pól przez płaskie pola prądu. Gładysz S., Rybarski A.), Zastosow. mat., 1955, 2, № 2, 150—160 (польск.; рез. русс., англ.)

Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий, при которых электростатическое пространственное поле моделируется плоским полем электрического тока. Показано, что электростатическое поле с потенциалом ψ может быть моделировано плоским полем тока, если существует такая ортогональная криволинейная система координат (u, v, w), что $\partial\psi / \partial w = 0$, а функция $W(v, v, w) = (\partial x / \partial w)^2 + (\partial y / \partial w)^2 + (\partial z / \partial w)^2$, где (x, y, z) — декартовы координаты точки (u, v, w), представляется в виде $W(u, v, w) = \omega(w) W_1(u, v)$. Приведено также несколько теорем о виде моделирующей функции и о моделировании краевых условий. P. Szeptycki

1488 Д. Решение некоторых краевых задач математической физики для слоя с шаровыми полостями. Кауфман Р. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Минск, 1956

1489 Д. Исследование прочности тонкостенной каркассированной оболочки от действия аксиальных сил. Суханов И. М. Автореф. дисс. канд. техн. н. Харьковск. инж.-строит. ин-т, Харьков, 1956

1490 Д. О характеристиках уравнений нелинейной механики, входящих в особую точку первой группы. Гукъямухов М. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Узб. ун-т, Самарканд, 1956

См. также: 1073, 1255, 1494, 1512, 1513, 1614, 1627, 1757, 1803, 1811, 1814—1818, 1823, 1826

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1491. Об оценках некоторых детерминантов и приложении этих оценок к распределению собственных значений. Гельфонд А. О., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 49—50

1492. Интегральное уравнение Абеля как операция свертывания. Самнер (Abel's integral equation as a convolution transform. Sumner D. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 82—86 (англ.)

Исследуется интегральное уравнение Абеля при предположениях, что решение $\Phi(T) \in L(0, T_0)$ для всех $T_0 > 0$ и что

$$\int_0^T \Phi(U)\,dU = O(T^{\alpha-\delta}),\ T \to \infty,$$

где $\delta > 0$, а параметр α, входящий в уравнение, удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < 1$. Заменой переменных уравнению придается вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $K(x) = [\exp(-x) - 1]^{-\alpha}(\operatorname{sgn} x - 1)/2$. Свертка (1) обращается оператором интегро-дифференциального типа. Доказана формула

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)] =$$

$$= (2\pi)^{-1} \lim_{\theta \to \pi} \int_{-\theta}^{\theta} [1 + \exp(-iy)]^{\alpha-1} g'(x+iy)\,dy,$$

где

$$g(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-v)\,dv}{1+\exp(-v)},$$

Ю. И. Черский

1493. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Ким Е. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 55

1494. Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала. Иванов В. К., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 409—411

Если известна постоянная плотность σ обложения плоской ограниченной односвязной области D и ее внешний логарифмический потенциал V_e, то задача определения формы D называется обратной задачей логарифмического потенциала. Показывается, что функция $z(t)$, $z(0) = 0$, конформно отображающая $|t| < 1$ на область D плоскости z, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\overline{\sigma z}(t^{-1}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{u_e[z(\tau)]}{\tau - t}\,d\tau,\ |t| > 1,$$

где $u_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z} V_e(z, \bar{z})$ — аналитическая функция z вне D. Из этого результата вытекает ряд следствий, в частности относительно возможности аналитического продолжения внешнего потенциала внутрь D. Далее, если $z(e^{i\psi}) = x(\psi) + iy(\psi)$, то для границы области D интеграл

$$H = \int_0^{2\pi} \left[x^2 + y^2 + \frac{2}{\pi\sigma} V_e(x, y)\right] d\psi$$

имеет стационарное значение. В. И. Левин

1495. О корреляционных интегральных уравнениях, фундаментальные функции которых — полиномы. Номоконов М. К., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 137—145

Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)} \varphi(y)\,dy \quad (-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty) \qquad (1)$$

рассматривается при условиях $F(x, y) = F(y, x) > 0$

$$(a < x,\ y < b),\ p(x) = \int_a^b F(x, y)\,dy,$$

$$\int_a^b \int_a^b \frac{F^2(x, y)}{p(x)\,p(y)}\,dy\,dx < \infty, \int_a^b \int_a^b F(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Вводятся функции

$$\Psi_0(x, y) = \frac{F(x, y)}{p(x)},$$

$$\Psi_k(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{k-1}(x, t)\,dt \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Теорема. Для того чтобы n первых собственных функций уравнения (1) были ортогональными полиномами последовательно возрастающих степеней по весу $p(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi_k(x, b) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, (при $k = 1$ это условие выполняется автоматически).

Из теоремы вытекают критерии прямолинейности симметричной корреляции и полиноминальности условных степенных моментов. Приведены примеры.

Примечание референта. Из рассуждений автора не следует, что собственные функции, о которых идет речь в теореме, отвечают именно первым (наименьшим по абсолютной величине) собственным значениям. М. Ш. Бирман

1496. К вопросу об аналитическом виде фундаментальных функций одного класса корреляционных интегральных уравнений. Номоконов М. К., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 146—148

Дополнение к предыдущей работе автора (реф. 1495). Если функция $\Psi_2(x, y)$ знакопостоянна, то вторая собственная функция $\varphi_1(x)$ монотонна. Замена переменных $\xi = \varphi_1(x)$, $\eta = \varphi_1(y)$ позволяет в этом случае получить из предыдущей теоремы критерий того, чтобы собственные функции корреляционного интегрального уравнения были полиномами относительно $\varphi_1(x)$. М. Ш. Бирман

1497. Об одном интегральном уравнении с нерегулярным ядром. Эйдельман С. Д., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 235—239.

На функциях $u = u(t)$, имеющих при $0 \leqslant t \leqslant 1$ непрерывную вторую производную и равных нулю при $t = 0$, определяется интегральный оператор

$$Au^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i)} \int_0^t \frac{k}{2\sqrt{m}\,(t-\tau)^{3/2}} \times$$

$$\times\, e^{\frac{ik^2}{4m(t-\tau)}} u(\tau)\,d\tau \quad (m > 0).$$

Устанавливается формула композиции операторов $A^{(m)}$:

$$A^{(m)}A^{(n)} = A^{(mn\,|\,(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2)}/2. \qquad (1)$$

С помощью формулы (1) доказывается, что интегральное уравнение

$$\mu(t) + 2A^{(1)}\mu = \varphi(t) \qquad (2)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю при $t = 0$, имеет единственное решение

$$\mu(t) = \varphi(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A^{(1/n^2)}\varphi,$$

если $\varphi(t)$ трижды непрерывно дифференцируема и равна нулю вместе со своей первой производной при $t = 0$. Л. Н. Слободецкий

1498. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Станкович (О једној класи сингуларних интегралних једначина. Станковић Б.), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 81—130 (серб.; рез. франц.)

Автор имеет дело с функцией $K_{\mu\nu}(\lambda, t)$, преобразование Лапласа которой имеет форму $s^{\mu}e^{-\lambda s^{\nu}}$. В случае $\lambda = 1$ он дает эту функцию в виде определенного интеграла и, кроме того, в случае $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ выводятся для нее асимптотические формулы, именно $K_{0\nu}(1, t) \sim \sin \nu\pi \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}$. Доказано, что $K_{0\nu}(1, t) > 0$ для $0 < t < \infty$. Автор рассматривает также интегральное преобразование

$$P_{\nu}(t, f) = \frac{1}{\nu}\int_0^{\infty} K_{0\nu}(1, t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau)\, d\tau$$

и доказывает, что если $\varphi(1)$ — преобразование Лапласа для $f(t)$, то $s^{\nu-1}\varphi(s^{\nu})$ есть преобразование Лапласа для $P_{\nu}(t, f)$. Наряду с функцией $K_{\mu\nu}(\lambda, t)$ рассматриваются также функции, преобразования Лапласа которых имеют форму $\rho(s)\, e^{-\lambda\psi(s)}$. Результаты автора могли бы быть выражены более простым способом, если бы сначала он рассматривал только функции $K_{\mu\nu}(T)$, имеющие преобразование $s^{\mu}e^{-s^{\nu}}$. Вышеупомянутая теорема о преобразовании $P_{\nu}(t, f)$ есть частный случай известной теоремы Эфроса (Матем. сб., 1935, **42**, № 6, 699—706). Обозначения автора отличаются от общепринятых: в преобразовании Лапласа он обычно определяет интегрирование по переменной x и употребляет букву t в качестве параметра. J. Mikusiński

1499. Интегро-дифференциальное уравнение движения водонефтяного контакта в пористой среде. Данилов В. Л., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 203

1500. Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Быков Я. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I, М., АН СССР, 1956, 43

1501. К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Гурьянов И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 51

1502. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях. Микусинский (Sur quelques équations intégro-différentielles. Mikusiński J.), Studia math., 1956, **15**, № 2, 182—187 (франц.)

Доказываются теоремы единственности для следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\int_0^t p(t-\tau)\,[\partial x(\lambda, \tau)/\partial\lambda]\, d\tau = \int_0^t q(t-\tau)\, x(\lambda, \tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

$$\int_0^t p(t-\tau)\,[\partial x(\lambda, \tau)/\partial\lambda]\, d\tau = x(\lambda, \tau), \qquad (2)$$

$$\partial x(\lambda, t)/\partial\lambda = \int_0^t q(t-\tau)\, x(\lambda, \tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

в которых неизвестная функция $x(\lambda, t)$ определена в прямоугольнике R: $[0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ и удовлетворяет начальному условию $x(0, t) = 0$. Аналогичные теоремы относительно уравнения (1) для прямоугольной области были доказаны ранее (Colloq. math., 1951, **2**, 178—181). Здесь другим методом, основанным на теореме моментов, доказано, что решение уравнения (3) единственно в R, что решение уравнений (1) и (2) единственно при условиях: $p(t) \geqslant 0$, $\int_0^t p(\tau)\, d\tau \geqslant kt^{\alpha}$, $k > 0$, $0 < \alpha < 1$, и что решение уравнения (1) единственно при условии абсолютной непрерывности функций $p(t)$ и $q(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$ и $p(0) \neq 0$. S. Drobot

1503. Исправления к работе «Интегральное уравнение Урысона». Вайнберг М. М., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1956, **39**, 131—132

Автор исправляет неточность на стр. 55 своей работы (РЖМат, 1955, 5861).

1504. Об одном классе нелинейных уравнений. Ладыженский Л. А., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 2, 31—38

Изучается уравнение

$$A\varphi + f = \lambda\varphi, \qquad (1)$$

где A — вполне непрерывный (вообще говоря, нелинейный) положительный оператор в банаховом пространстве, полуупорядоченном при помощи некоторого конуса K, а f — положительный элемент. Выясняется, при каких значениях параметра λ уравнение (1) имеет положительные решения. Исследуется зависимость решений уравнения (1) от параметра λ.

Более сильные теоремы (уравнение (1) не может иметь более одного положительного решения, решение является монотонной функцией параметра) доказаны при дополнительных предположениях: существует такой элемент $u_0 \in K$, что $\mu(\varphi)\, u_0 \leqslant A\varphi \leqslant \nu(\varphi)\, u_0$ для любого $\varphi \in K$ $(\varphi \neq 0)$, где $\mu(\varphi)$ и $\nu(\varphi)$ положительны; каждому элементу $\varphi \geqslant \gamma u_0$ $(\gamma > 0)$ и каждому сегменту $[a, b] \subset (0, 1)$ соответствует такое η, что

$$A(t\varphi) \geqslant (1+\eta)\, tA\varphi \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Полученные результаты обобщают ряд теорем П. С. Урысона (Труды по топологии и другим областям математики, М. — Л., ГТТИ, 1951, 45—71) о положительных решениях нелинейных интегральных уравнений. М. А. Красносельский

1505. Исследование точек ветвления нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами. Габиб-Заде А. Ш., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 44—45

1506. Исследование свойств нелинейных сингулярных операторов. Гусейнов А. И., Абасов А. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 51—52

1507. О некоторых теоремах существования и единственности для одного нелинейного интегрального уравнения общего вида. **Кучмар М. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 56—57

1508. Эффективные методы интегральных уравнений в применении к некоторым задачам теории упругости. **Шерман Д. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 216

1509 Д. О поведении решений интегро-дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. Иманалиев М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

См. также: 1069, 1445, 1448, 1481, 1483, 1510

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1510. **Нелокальные задачи в вариационном исчислении. I.** Кшивицкий, Жевуский, Заморский, Зємба (Non-local problems in the calculus of variations (I). Krzywicki A., Rzewuski J., Zamorski J., Zięba A.), Ann. polon. math., 1955, **2**, № 1, 77—96 (англ.)

Рассматривается так называемая нелокальная вариационная задача для функционала

$$W=\int_a^b L^{(1)}[t,\ q_i(t),\ \dot q_i(t)]\,dt+$$

$$+\lambda\int_a^b\int_a^b L^{(2)}[t,\ t';\ q_i(t),\ q_i(t'),\ \dot q_i(t),\ \dot q_i(t')]\,dt\,dt',$$

где искомые функции $q_i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, зависят от одного переменного t, $a\leqslant t\leqslant b$, функции Лагранжа $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ регулярны и λ — параметр. Такие задачи встречаются в квантовых теориях поля.

Необходимое условие для экстремума функционала W при предположении, что вариации δq_i и δt равны 0 для $t=a$ и $t=b$, получается в виде системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

где $L=L^{(1)}+2\lambda\int_a^b L^{(2)}dt'$.

В случае $n=1$ она сводится к уравнению

$$\ddot q=\frac{\varphi_1(t,\ q,\ \dot q)+\lambda\int_a^b\Phi_1(t,\ t',\ q,\ q',\ \dot q,\ \dot q')\,dt'}{\varphi_2(t,\ q,\ \dot q)+\lambda\int_a^b\Phi_2(t,\ t',\ q,\ q',\ \dot q,\ \dot q')\,dt'},\qquad(1)$$

где φ_1, φ_2, Φ_1, Φ_2 линейно выражаются через частные производные от $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ по t, q и $q'=q(t')$. При помощи принципа сжатых отображений Банаха доказывается, что если $|\varphi_2|\geqslant\sigma>0$ и φ_1, φ_2, Φ_1, Φ_2 удовлетворяют условию Липшица по переменным q и $\dot q$, то при достаточно малых значениях λ в некоторой окрестности точки $(t_0,\ q_0,\ \dot q_0)$ существует единственное решение уравнения (1), проходящее через эту точку. Аналогичное рассуждение можно применить к системе $n>1$ таких интегро-дифференциальных уравнений, и, следовательно, эта система (локально) эквивалентна некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее рассматривается приведение к обыкновенному дифференциальному уравнению следующего уравнения

$$p_2(t)\ddot q(t)+p_1(t)\dot q(t)+p_0(t)q(t)=$$

$$=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\ t')\,q(t')\,dt'.\qquad(2)$$

Здесь функции p_0, p_1, $p_2\neq0$, f непрерывны, $|\partial K/\partial t|$ ограничена и ядро K непрерывно относительно t' в $a\leqslant t,\ t'\leqslant b$. Оно вначале приводится к некоторому уравнению Фредгольма и к уравнению типа

$$\ddot q+p_1\dot q+p_0q=h_0+\lambda[h_1q(a)+h_2\dot q(a)+$$

$$+h_3q(b)+h_4\dot q(b)],$$

в котором $h_i(t)$, $i=0,\ \ldots,\ 4$, непрерывны при $a\leqslant t\leqslant b$. Доказывается, что для всех значений λ, за исключением не более двух, это уравнение имеет (единственное) решение вида

$$q(t)=C_1q_1(t)+C_2q_2(t)+H_0(t)+\lambda[H_1q(a)+$$

$$+H_2\dot q(a)+H_3q(b)+H_4\dot q(b)],$$

где $H_i(t)$ выражаются при помощи линейно независимых интегралов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ дифференциального уравнения $p_2\ddot q+p_1\dot q+p_0q=0$.

Наконец, исключением параметров C_1, C_2, $q(a)$, $\dot q(a)$, $q(b)$, $\dot q(b)$ из полученных формул придем к дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $q(t)$.

В случае, если уравнение (2) имеет вид

$$\ddot q(t)+\varkappa^2q(t)=\lambda\int_a^b K(t,\ t')\,q(t')\,dt',$$

вместо предыдущей сложной процедуры можно применить более простой способ. Это уравнение приводим к интегральному уравнению

$$q(\tau)=\dot q(a)\varkappa^{-1}\sin\varkappa(\tau-a)+q(a)\cos\varkappa(\tau-a)+$$

$$+\lambda\int_a^b N(\tau,\ t')\,q(t')\,dt',$$

где $N(\tau,\ t')=\int_a^b\Delta^r(\tau-t)\,K(t,t')\,dt$, $\Delta^r(t)=\varkappa^{-1}\sin\varkappa t$ для $t\geqslant0$, $\Delta^r(t)=0$ для $t<0$, и затем исключением параметров $q(a)$ и $\dot q(a)$ из решения интегрального уравнения получим уравнение вида $\ddot q+\varkappa^2q=Aq+Bq$, в котором функции $A(t)$ и $B(t)$ известны. На этом основании первоначальное интегро-дифференциальное уравнение можно решить другим способом, взяв функции $A(t)$ и $B(t)$, удовлетворяющие тождеству

$$A(t)\dot q(t)+B(t)q(t)=\lambda\int_a^b K(t,\ t')\,q(t')\,dt'.$$

Даются формулы приведения для коэффициентов $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ разложений функций A и B в степенные ряды с переменной λ. S. Drobot

1511. **Применение метода Релея — Ритца к вариационным проблемам.** Индрик (Applications of the Rayleigh Ritz method to variational problems. Indritz J.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, Suppl. № 1, 765—797 (англ.)

Рассматривается проблема минимума функционала

$$I[\psi]=\iint_R(a\psi_x^2+b\psi_y^2+c\psi^2+2f\psi)\,dx\,dy$$

среди функций класса C^k в $\bar R=R+\Gamma$ (Γ — граница R), принимающих значение g на Γ.

Основной результат: Пусть R — ограниченная область с границей Γ, состоящей из конечного числа простых замкнутых регулярных дуг класса C^k ($k\geqslant3$); $G(x,\ y)$ — функция класса C^k в $\bar R$, равная нулю на Γ, положительная в R и $\partial G/\partial\nu\geqslant\delta>0$ на Γ (ν — нормаль к Γ); $\{f_i\}$ — ортогональная система, образованная из множества $\{Gx^iy^i\}$ в пространстве функций с нормой

$$\|\xi\|^2=D[\xi]=\iint_R(a\xi_x^2+b\xi_y^2+c\xi^2)\,dx\,dy$$

($\xi=0$ на Γ), где a, b, c ограничены и интегрируемы, причем $a>0$, $b>0$, $c\geqslant0$ в $\bar R$. Пусть $g(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$ — функции класса C^k в $\bar R$, причем $\psi(x,\ y)|_\Gamma=g(x,\ y)|_\Gamma$. Положим $b_i=D[\psi-g,\ f_i]$, где $D[\xi,\eta]=$

$=\iint_R(a\xi_x\eta_x+b\xi_y\eta_y+c\xi\eta)\,dx\,dy$. Тогда

$$D[\psi-g-\textstyle\sum_{i=1}^n b_if_i]\leqslant n^{-(k-2)}\theta(n),$$

$$\left|\psi-g-\textstyle\sum_{i=1}^m b_if_i\right|=O\left(\sqrt{\frac{V\theta(n)}{n^{k-2}}\log\frac{n}{(\log n)^N}}\right),$$

причем $\lim_{n\to\infty}\theta(n)=0$, $\theta(n)$ зависит от $\psi-g$, $N>0$ — некоторая константа. Если $k\geqslant 10$, то

$$\left|\nabla\psi-\nabla\left(g+\sum_1^n b_i f_i\right)\right|=O\left([n^{-(k-10)}\theta(n)]^{\frac{1}{4}}\right).$$

Если S — замкнутое множество в R, $k\geqslant 7$, то для любой точки $P\in S$

$$\left|\nabla\psi-\nabla\left(g+\sum_1^n b_i f_i\right)\right|=O\left([n^{-(k-6)}\theta(n)\log n]^{1/4}\right).$$

Рассматривается также проблема минимума функционала

$$D^p[\psi]=\iint_R (a\psi_x^2+b\psi_y^2+c\psi^2)^p dx\,dy.$$

Примечание референта. Основные результаты автора несколько слабее результатов в статьях И. Ю. Харрик (Докл. АН СССР, 1951, 82, № 2, 157—160; РЖМат, 1956, 7973). В. П. Ильин

1512. Методы, инспирированные методом Ритца, в вариационном исчислении и в теории дифференциальных уравнений. Фаэдо (I metodi ispirati a quello di Ritz nel calcolo delle variazioni e nella teoria delle equazioni differenziali. Faedo Sandro), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, 86, № 1, 291—302 (итал.)

Обзор некоторых большей частью итальянских работ по методам Ритца, наименьших квадратов и моментов. С. Г. Михлин

1513. Прямые методы вариационного исчисления. Сигалов А. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 42—43

1514. Периодическая задача вариационного исчисления в целом на сферических многообразиях. Альбер С. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 134

Дана новая оценка числа геометрически различных замкнутых геодезических линий на многообразиях M^n, гомеоморфных n-мерной сфере, а именно: если $n=2^k+S$ (k — целое число, $S<2^k$), то на M^n существует не менее $2n-1-S$ геометрически различных замкнутых геодезических.

Нижняя грань полученной оценки имеет порядок $3n/2$. Для алгебраического числа замкнутых геодезических более простым методом получена оценка М. Морса. Л. Э. Эльсгольц

1515. Вариационное исчисление в целом. Фет А. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 137

1516. Вариационное исчисление в целом. Фет А. И. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 56

1517. Об эффективном разбиении фигур. Стейн, Стейн (On dividing an object efficiently. Stein H. D., Stein S. K.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 2, 111—112 (англ.)

Решаются вариационные задачи: 1) Какая кривая имеет наименьшую длину среди простых кривых в круге K, соединяющих две заданные точки на его окружности и делящих круг на две равновеликие части? 2) Какая кривая имеет наименьшую длину среди простых замкнутых кривых внутри круга K, разбивающих его на две равновеликие части? А. В. Погорелов

1518. Вариационные методы и канонические уравнения в механике деформируемых сред. Гольденблат И. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 157—158

1519 К. Вариационное исчисление. Грюсс (Variationsrechnung. 2. durchges. u. erw. Aufl. Grüss Gerhard. Heidelberg, Quelle und Meyer, 1955, VIII, 282 S., ill., 14 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 1, 38 (нем.)

1520 К. Курс вариационного исчисления. Лаврентьев, Люстерник (Curs de calcul variațional. Lavrentiev M. A., Liusternik L. A. Trad. din limba rusă. București, Ed. tehn., 1955, 268 p., il.), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 24, 10 (рум.)

1521 К. О введении Каратеодори к работам Эйлера по вариационному исчислению. Титце (Bemerkungen zu Carathéodory's Einführung in Euler's Arbeiten über Variationsrechnung. Tietze Heinrich. (Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Sonderdruck Sitzungsber., 1955, 1, 0.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 24, 1322 (нем.)

1522 Д. Критические точки действительных функций, определенных на двумерных многообразиях. Фокс (The critical points of real functions defined on 2-manifolds. Fox William Cassidy. Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 598 (англ.)

См. также: 1252, 1439, 1808

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

1523. Работы Гаусса по математическому анализу. Маркушевич А. И. В сб.: Карл Фридрих Гаусс. М., АН СССР, 1956, 145—216

Обзор аналитических работ Гаусса, из которых немногие были опубликованы при его жизни, большинство же стало известно лишь по изданным впоследствии материалам его научного наследства.

1. Еще в юности Гауссом были начаты исследования, относящиеся к арифметико-геометрическому среднему и к лемнискатическим функциям. На примере этих функций Гаусс на исходе XVIII в. разработал все основное содержание позднейшей общей теории эллиптических функций, ограничиваясь при этом (как подчеркивает автор обзора) средствами, обычными для аналитиков XVIII в. Сюда же примыкает ряд результатов Гаусса по теории эллиптических функций и началам теории модулярных функций.

Гаусс придавал большое значение теории высших трансцендентных функций и намеревался дать систематическое изложение своих исследований в этой области, но это намерение так и осталось неосуществленным.

2. Из четырех доказательств основной теоремы алгебры, данных Гауссом, начиная с докторской диссертации 1799 г., особый интерес для анализа представляет третье (1816 г.), которое по методам целиком принадлежит к теории аналитических функций комплексного переменного (как видно из письма к Бесселю от 1811 г., основами этой теории Гаусс вполне владел). Впрочем, само доказательство излагается Гауссом без использования комплексных чисел и носит несколько искусственный характер. Это побудило автора обзора сделать попытку реконструировать ход идей Гаусса, представив его доказательство

как пример применения «принципа аргумента».

3. В одной незаконченной статье (около 1800 г.) Гаусс применительно к числовой последовательности устанавливает ряд тонких понятий теории пределов, вошедших в науку лишь значительно позже: верхняя граница и наименьшая верхняя граница, нижняя граница и наибольшая нижняя граница, «последние» нижняя и верхняя граница (наименьший и наибольший пределы), «абсолютная» граница (предел).

4. В 1813 г. Гауссом была опубликована работа, посвященная так называемому гипергеометрическому ряду

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

К рассмотрению подобных рядов его привели потребности астрономических вычислений. К тому же эти ряды, за выключением специальных случаев, представляют высшие трансцендентные функции, к которым Гаусс издавна питал интерес.

В работе проводится точное разграничение случаев сходимости и расходимости ряда. Изучение величины $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ приводит Гаусса к рассмотрению предела

$$\Pi(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2 \ldots k}{(z+1)(z+2)\ldots(z+k)} z^k$$

(которым Эйлер еще в 1729 г. определял $z!$ для любого z). Свойствам этой функции и ее приложениям к вычислению определенных интегралов посвящена последняя часть работы.

В наследии Гаусса мы находим продолжение этой работы, в котором устанавливается связь функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ с известным дифференциальным уравнением второго порядка.

5. В 1813 же году появилось исследование Гаусса о притяжении со стороны эллипсоидальных однородных тел. Существенную роль в нем играет преобразование трехкратных интегралов, распространенных на объем тела, к двукратным интегралам, распространенным только на поверхность тела. Гауссом рассмотрены лишь частные случаи такого преобразования, и в каждом случае все рассуждения проводятся заново, но общая идея выявлена с полной отчетливостью.

6. Известная гауссова формула квадратур опубликована в работе 1814 г.

7. В заключение, автор останавливается на двух более поздних работах Гаусса: «Общие принципы теории фигуры жидкости в состоянии равновесия» (1830 г.) и «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1840 г.). Первая трактует одну задачу из теории капиллярности, приводящуюся к разысканию экстремума двойного интеграла. Вторая представляет собой первое в науке систематическое изложение теории потенциала. Она последовательно использует (ср. 5) преобразование объемных интегралов в поверхностные; аналогично, в первой работе интеграл по поверхности заменяется криволинейным интегралом по ее границе.

Автор использовал, в числе прочих материалов, обстоятельные комментарии к трудам Гаусса, написанные группой ученых во главе с Ф. Клейном, но относясь к ним критически и в ряде случаев противопоставляет им собственную точку зрения.

Г. М. Фихтенгольц

1524. О некоторых итерационных последовательностях. Байрактаревич (Sur certaines suites itérées. Bajraktarević Mahmud), Djela. Naučd. društvo NR BiH., 1954, 4, 33 s. (франц.)

Пусть A_ν — положительные числа и $f_\nu(x)$ ($|x| \leqslant A_\nu$) — действительные функции, удовлетворяющие условиям: $f_\nu(x) \geqslant 0$, $f_{\nu+1}(A_{\nu+1}) \leqslant A_\nu$. Уточняются и немного обобщаются результаты (РЖМат, 1955, 1329), опубликованные автором в 1953 г. (без доказательств), о предельных свойствах последовательности

$$x_\nu^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon_0 f_\mu \{\varepsilon_1 f_{\mu+1}[\ldots(\varepsilon_\nu f_{\mu+\nu}(t))\ldots]\}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots)$$

при фиксированном $\mu = 0, 1, \ldots$ и $\varepsilon_\nu = \pm 1$.

Г. Ф. Кангро

1525. Нули производящих функций последовательностей и функций кратной позитивности. Шёнберг (On the zeros of the generating functions of multiply positive sequences and functions. Schoenberg I. J.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 447—471 (англ.)

Последовательность $\{a_n\}$, $-\infty < n < \infty$ (все $a_n \geqslant 0$, $\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n < \infty$) называется k-позитивной, если матрица $A = \|a_{j-i}\|$ ($-\infty < i, j < \infty$) бесконечного порядка k-позитивна, т. е. все ее миноры порядка $\leqslant k$ неотрицательны. Доказано, что если последовательность вида $\ldots 0, 0, a_0, a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots$ ($a_0 > 0$, $a_m > 0$) k-позитивна, то ее производящая функция $P_m(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ не имеет нулей в секторе

$$|\arg z| < \frac{k\pi}{m+k-1}. \qquad (1)$$

Функция $f(x)$, измеримая и неотрицательная при $-\infty < x < \infty$, $0 < \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$, называется k-позитивной, если для $n = 1, 2, \ldots, k$ при $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ $\det \|f(x_i - y_j)\|_1^n \geqslant 0$. Доказано, что если функция, обращающаяся в нуль вне $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ k-позитивна, то ее преобразование Лапласа $F(s) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-sx} f(x)\,dx$ не имеет нулей в полосе

$$|\operatorname{Im} z| < k. \qquad (2)$$

Приведены примеры, показывающие, что оценки (1) и (2) не могут быть улучшены: последовательность

$$\ldots 0, 0, \begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} m \\ 1 \end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix} m \\ m \end{Bmatrix}, 0, \ldots,$$

$$\begin{Bmatrix} m \\ \nu \end{Bmatrix} = \frac{\sin m\theta \sin(m-1)\theta \ldots \sin(m-\nu+1)\theta}{\sin\theta \sin 2\theta \ldots \sin\nu\theta}, \quad \begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix} = 1,$$

и функция

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\cos x)^\alpha & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}, \quad (\theta > 0,\ \alpha > -1).$$

П. А. Шварцман

1526. Монотонные и выпуклые операторные функции. Бендат, Шерман (Monotone and convex operator functions. Bendat Julius, Sherman Seymour), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 58—71 (англ.)

Пусть $f(x)$ — вещественная ограниченная функция, заданная на интервале I (открытом, полуоткрытом, замкнутом или бесконечном); K — совокупность всех

ограниченных линейных операторов в фиксированном гильбертовом пространстве, спектр которых принадлежит I; K_n — аналогичная совокупность матриц n-го порядка.

Вводится определение. Пусть A — некоторый оператор, тогда $f(A)$ есть самосопряженный оператор, $f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda$. Если x_n — симметрическая или эрмитова матрица, тогда $f(x_n)$ тоже матрица, имеющая те же собственные векторы, и соответствующие собственные числа λ заменены на $f(\lambda)$. $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) операторной (матричной порядка n) функцией, если для любых A, $B \in K$ (соответственно A, $B \in K_n$) из $A \leqslant B$ (т. е. $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$ для всех векторов x) следует $f(A) \leqslant f(B)$ (соответственно $f(A) \geqslant f(B)$). Убывающая или возрастающая операторная (соответственно матричная порядка n, функция называется монотонной операторной (соответственно матричной порядка n) функцией. Далее $f(x)$ называется выпуклой операторной (матричной порядка n) функцией, если $f[(1-t)A + tB] \leqslant (1-t) f(A) + tf(B)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, для всех A, $B \in K$ (соответственно A, $B \in K_n$). Доказывается, что $f(x)$ является монотонной (выпуклой) операторной функцией тогда и только тогда, когда она есть монотонная (соответственно выпуклая) матричная порядка n функция для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Это предложение позволяет перенести результаты Лёвнера (Löwner K., Math. Z., 1936, 41, 18—42) о монотонных матричных функциях на монотонные операторные функции. Кроме того, доказывается, что:

1) Функция $f(x) = \Sigma_1^\infty a_n x^n$, где радиус сходимости ряда есть R, будет монотонной операторной функцией в интервале $(-R, R)$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде

$$f(x) = \int_{-R-1}^{R-1} x\,(1 - tx)^{-1} d\psi(t), \qquad (1)$$

где $\psi(t)$ — ограниченная неубывающая функция, постоянная при $|t| > R^{-1}$; если при этом $R = \infty$, то $f(x) = a_1 x$, $a_1 > 0$. Если $0 < R < \infty$, то при условии $\psi(-1/R) = 0$ и непрерывности слева $\psi(t)$ представление (1) единственно.

2) Если $f(x) = \Sigma_1^\infty a_n x_n$, где радиус сходимости есть R, и если $\Sigma_{\lambda,\,\mu=0}^{N} (f^{(\lambda+\mu+1)}(0) / (\lambda + \mu + 1)!)\, \zeta_\lambda \overline{\zeta}_\mu \geqslant 0$ для всех $N = 0, 1, 2, \ldots$, то $f(x)$ — монотонная операторная функция в интервале $(-R, R)$.

3) Функция $f(x)$ есть выпуклая операторная (матричная порядка n) функция в интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $F_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ есть монотонная операторная (соответственно матричная порядка n) функция в (a, b) для каждого фиксированного $x_0 \in (a, b)$. Комбинирование этого предложения с предыдущими результатами о монотонных операторных функциях приводит к ряду результатов о выпуклых операторных функциях. В частности, из формулы (1) получается аналогичный результат об интегральном представлении выпуклой операторной функции.

М. А. Наймарк

1527. Об обобщении линейной однородной функции *ya*. Хеброни (On a generalization of the linear homogeneous function *ya*. Hebroni P.), Riveon lemat., 1954, 8, 16—29 (иврит; рез. англ.)

Пусть R означает кольцо, определенное в статье автора (Compositio math., 1938, 5), R_d — подкольцо, состоящее из всех элементов, которые обладают производной. Если a перестановочно, то будем считать, что a^{-1} существует, и если a обладает производной, то будем считать, что a' существует. Любой элемент, для которого существуют a^{-1} и $(a^{-1})'$, будем называть совершенным элементом. Предполагается, что существует постоянное $c \in R_d$ такое, что $x = (\int 1) + c$ совершенно. Функцию $f(y)$, которая любому $y \in R$ ставит в соответствие элемент $f(y) \in R_d$, будем называть также L-функцией, если выполняются следующие условия: A. Если существуют y' и z', то $f(y \pm z) = f(y) \pm f(z)$. B. Если существует y', то $xf(y) = f(x, y)$. C. Если $k' = 0$, тогда $[f(k)]' = 0$, и если y' существует, то $\int f(y) = f(\int y)$. Пусть $t(y)$ и $g(y)$ — две L-функции. Исследуем следующие уравнения:

$$xy'' + f(y') + xg(y) = 0, \qquad (1)$$

$$xz'' + f(z') + 2z' + xg(z) = 0. \qquad (2)$$

Теорема: α) Если y — решение уравнения (1) и если y''' существует, то $z = x^{-1}y'$ является решением уравнения (2).

β) Если z — решение уравнения (2) и если уравнение $g(\hat{c}) = A_w [xz' + f(z) + z]$ (A_w определяет начальные значения a, см. определения на стр. 414 о вышесказанном) имеет постоянное решение $\hat{c}$, тогда $y = \int (xz) + \hat{c}$ есть решение уравнения (1).

γ) Пусть a и b совершенны и постоянны и $ac = ca$ ($c = A_w x$). Пусть z — решение уравнения

$$xz'' + f(z') + 2z' + xazb = 0.$$

Тогда $y = \int (xz) - a^{-1} A_w [xz' + f(z) + z] \cdot b^{-1}$ — решение уравнения $xy'' + f(y') + xayb = 0$. Резюме автора

1528. Дифференциальные свойства вещественной функции Минковского. Статистика цепных дробей. Данжуа (Propriétés différentielles de la fonction minkowskienne zéelle. Statistique des fractions continues. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 17, 2075—2079 (франц.)

Вещественная, непрерывная, убывающая функция $\varkappa(x, \alpha)$, определенная функциональным уравнением

$$\varkappa\left(\frac{p+p'}{q+q'}, \alpha\right) = \alpha\varkappa\left(\frac{p'}{q'}, \alpha\right) + (1-\alpha)\varkappa\left(\frac{p}{q}\alpha\right),$$

где p, p', q, q' — целые числа, $q \geqslant 1$, $q' \geqslant 0$, $pq' - qp' = 1$, и условиями $\varkappa(\infty, \alpha) = 0$, $\varkappa(0, \alpha) = 1$, не имеет ни в одной точке, отличной от нуля, конечной производной. Более того, если в какой-либо точке верхняя и нижняя производные этой функции конечны и отрицательны, то их отношение, равномерно по α, должно превосходить $^{17}/_{16}$. Формулируется ряд неразрешенных вопросов, относящихся к поведению функции $\varkappa(x, \alpha)$.

В связи с изучением этой функции рассматривается ряд вопросов метрической теории цепных дробей. В частности, исследуются меры множеств чисел x, $0 < x < 1$, при разложении которых в цепную дробь возникает последовательность неполных частных с определенными свойствами, как, например: среди первых n неполных частных в точности q должно быть больше или равно r, и т. п. Мера такого множества равна

$$C_n^q (h/r)^q (1 - h'/r)^{n-q},$$

где h и h' зависят от q, n и r, причем $1 < h,\ h' < 2$.

В. И. Левин

1529. Решение некоторых проблем Борсука и Яноши. Ацел (A solution of some problems of K.

Borsuk and L. Jánossy. A c z é l J.), Acta phys. Acad. sci. hung., 1955, 4, № 4, 351—362 (англ.; рез. русс.)

Действие $F(x, y)$ называется ассоциативным, если $F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)]$. Действие $\varphi(x, y)$ называется дистрибутивным относительно действия $F(x, y)$, если $\varphi[F(x, y), z] = F[\varphi(x, z), \varphi(y, z)]$. Выясняется, относительно каких непрерывных строго монотонных ассоциативных действий F будут дистрибутивны сложение, умножение, квазиумножение $\psi^{-1}[\psi(x)\,\psi(y)]$. Такими F будут соответственно

$$\lg_a(a^x + a^y); \quad \sqrt[k]{x^k + y^k}; \quad \psi^{-1}[\sqrt[k]{\psi(x)^k + \psi(y)^k}].$$

Выясняется, какие непрерывные строго монотонные ассоциативные действия φ будут дистрибутивны относительно сложения квазисложения $\psi^{-1}[\psi(x) + \psi(y)]$. Такими φ будут соответственно cxy; $\psi^{-1}[c\,\psi(x)\,\psi(y)]$

Рассматриваемые вопросы связываются с проблемами, относящимися к основаниям теории вероятностей (РЖМат, 1956, 8163). П. И. Романовский

1530. О непрерывных итерациях и их приложении к отысканию предельных функций некоторых последовательных итераций. Байрактаревич (Sur les itérées continues et leur application á la recherche des fonctions limites de certaines suites itérées. B a j r a k t a r e v i ć M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 13—22 (франц.)

Даются некоторые обобщения известных результатов относительно непрерывных итераций (РЖМат, 1955, 1329) и их приложение к отысканию предельных функций некоторых последовательных итераций.

К. М. Слепенчук

1531. Асимптотические разложения. Мозер, Уайман (Asymptotic expansions. M o s e r L e o, W y m a n M a x), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 225—233 (англ.)

Рассматриваются асимптотические формулы для коэффициентов целой функции $\exp(P(x))$, где $P(x) = b_1 x^r + b_2 x^s + \cdots + a_m x^m$—полином, $b_1, b_2, \ldots, a_m$ положительны, и общий наибольший делитель $(r, s, \ldots, m) = 1$. Например, полагая $\exp P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$, получим $B_n \sim n!\, R^{-n} \exp P(R)\,[1/(2\pi\theta^2 P(R))]^{1/2}$, где θ—оператор $R\frac{d}{dR}$ и R, как функция n, дается формулой $\theta P(R) = n$. Полагая $P(x) = x$, получаем как частный случай, формулу Стирлинга для $n!$ Ю. В. Линник

1532. Аппроксимация в среднем линейно независимыми функциями. Калуца (Mittlere Approximation mit linear unabhängigen Funktionen. K a l u z a T h., J r), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 5, 161—169 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Рассматриваются наилучшие средние квадратические приближения функции f, заданной в области B n-мерного пространства, с помощью линейно независимых функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, заданных в той же области. Автор устанавливает существование и единственность многочлена $P_n = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^{(n)} \varphi_j$ наилучшего квадратического приближения и дает для коэффициентов $A_j^{(n)}$ следующее выражение:

$$A_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ji}^{(n)} \int_B f\varphi_i\, dx,$$

где коэффициенты $a_{ji}^{(n)}$ не зависят от f. Далее автор получает ряд рекуррентных формул для $A_j^{(n)}$, $a_{ji}^{(n)}$ и т. д.

Вторая часть работы посвящена приложениям общей теории. Для случая $\varphi_i = x^i$, $B = [0, 1]$ доказывается теорема: если ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ аналитической функции $f(x)$ имеет радиус сходимости $r > 1$, то $\lim_{n\to\infty} A_i^{(n)} = C_i$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ Н. П. Куппов

1533. Несколько теорем о максимуме и минимуме. Кристя (Cîteva teoreme de maxime şi minime. C r i s t e a I o n I.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, B7, № 5, 245—250 (рум.)

Рассматриваются некоторые элементарные критерии существования максимума и минимума у функции одной и нескольких переменных. В. В. Немыцкий

1534. Модификация теоремы Эйлера. Кошти (Modification of Euler's theorems. K o s h t i M. E.), J. Univ. Poona. Sci. and Technol., 1953, № 4, 123—125 (англ.)

Работа содержит лишь элементарные следствия из известной теоремы Эйлера об однородных функциях. Г. М. Фихтенгольц

1535. Общее понятие дифференциала. Завровский (Concepto generalizado de diferencial. Z a w r o s k y A.), Bol. Acad. cienc. fis., mat. y natur., 1953, 16, № 49, 45—55 (исп.)

Анализируются различные понятия дифференциала функции одного переменного. В. В. Немыцкий

1536. Об особом интеграле вида

$$f_n(x) = \lambda_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + t)\,\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Шустер Х. С., Уч. зап. Гродненск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 79—89

Эта работа является непосредственным продолжением работы Н. Я. Шадриной (реф. 1537).

Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям: 1) $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \leqslant 1$ для $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$; 2) $\varphi(-t) = \varphi(t)$; 3) $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$; 4) $\varphi(t)$ возрастает на $[0, \pi]$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt = O\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt\right)$

6) $\int_0^{\pi} t\,\frac{dt}{\varphi(t)} = \infty$.

Если при этом $f(x) \in C_{2\pi}$ и имеет в точке x_0 конечные производные справа и слева $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то $f_n(x_0) - f(x_0) = 2\,[f'_+(x_0) - f'_-(x_0)]\,I_n + P_n$, где

$$I_n = \frac{\int_0^{\pi} t\,\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt}{\int_0^{\pi} \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt}, \quad \text{а } \rho_n = o(I_n).$$

Доказываются и некоторые другие теоремы, имеющие целью оценить быстроту приближения $f_n(x)$ к $f(x)$ при различных условиях, налагаемых на $f(x)$ или на $\varphi(t)$. Н. К. Бари

1537. Об одном виде особых интегралов. Шадрина Н. Я., Уч. зап. Гродненск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 1,73—78

Пусть $\varphi(x)$ четная, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ непрерывна и возрастает на $(0, \pi)$, $\varphi(x) \leqslant 1$, $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$ и $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\varphi(x)} = +\infty$.

Изучаются интегралы вида

$$I_n = \lambda_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + t)\,\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)}\,dt,$$

где λ_n — множитель, подобранный так, чтобы $I_n = 1$, если $f(x) \equiv 1$. Доказывается, что I_n стремится равномерно к $f(x)$, если $f(x) \in C_{2\pi}$.

В частном случае, когда $\varphi(x) = \sin^{2k}\frac{x}{2}$, имеем при $k=1$ ядро Фейера, а при $k=2$ — ядро Джексона. Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_M 1$ и

$$f_n(x) = \lambda_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left[\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right]^{2k} dt,$$

то при $k=1$, как известно, оценка $|f(x) - f_n(x)| < \frac{C \lg n}{n}$ не может быть улучшена, но при $k>1$ автор получает оценку

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{C}{n}, \qquad (1)$$

где $C = M \frac{k\pi^{k+1}}{2^{2k+1}(k-1)}$.

Примечание референта. Неравенство (1) (с некоторой константой C) известно; при $k=2$ оно получено Джексоном, а при $k>2$ следует, например, из работы С. Б. Стечкина (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 219—242). Константа C, найденная Н. Я. Шадриной, не является наилучшей. Н. К. Бари

1538. О неравенстве Матьё. Корпут, Хефлингер (On the inequality of Mathieu. Corput J. G. van der, Heflinger L. O.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 1, 15—20; Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 15—20 (англ.)

Неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+c^2)^{-2} < (2c^2)^{-1} \quad (c^2 > 0),$$

предполагавшееся Матье и доказанное Бергом (Berg L., Math. Nachr., 1952, 7, 257—259), является в основном частным случаем $f(x) = x(x^2+c^2)^{-2}$ общего неравенства

$$\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) < \int_a^b f(x)\,dx,$$

справедливого в следующих предположениях: 1) $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную для $a \leqslant x \leqslant b$, 2) существует разбиение $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_q < b$, при котором либо I. $f^{(4)}(x) \geqslant 0$ в интервалах (a, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5),... и $f^{(4)}(x) \leqslant 0$ в интервалах (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6),..., либо II. $f^{(4)}(x) \leqslant 0$ в интервалах (a, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5), ... и $f^{(4)}(x) \geqslant 0$ в интервалах (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), ..., причем в случае I

$$32[f'(a) - f'(b)] > f'''(a_1) - f'''(a_2) + \cdots - f'''(a_q)$$

для четного q и

$$32[f'(a) - f'(b)] > f'''(a_1) - f'''(a_2) + \cdots + f'''(a_q) - f'''(b)$$

для нечетного q, а в случае II

$$32[f'(a) - f'(b)] > f'''(a) - f'''(a_1) + f'''(a_2) - \cdots + f'''(a_q) - f'''(b)$$

для четного q и

$$32[f'(a) - f'(b)] > f'''(a) - f'''(a_1) + f'''(a_2) - \cdots - f'''(a_q)$$

для нечетного q. В. И. Левин

1539. О взаимной связи средних величин. Каминский Т. Э., Сб. студ. науч. работ по естеств.-матем. циклу. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, **1**, 18—24

Статья не содержит новых результатов (полное изложение см. РЖМат, 1956, 331). М. П. Щеглов

1540. Обобщение одного неравенства Харди и Литлвуда. Смит (A generalization of an inequality of Hardy and Littlewood. Smith K. T.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 157—170 (англ.)

Пусть

$$f > 0,\ f(x) \in L^p\ (p > 1)$$

и

$$\overline{f}(x) = \sup \frac{1}{v+u} \int_{x-u}^{x+v} f(t)\,dt.$$

Харди и Литлвуд доказали, что

$$\int_a^b [\overline{f}(x)]^p\,dx \leqslant A \int_a^b [f(x)]^p\,dx,$$

где A зависит только от p. Если же $p=1$, то это неравенство неверно, но имеет место

$$\int_a^b \overline{f}(x)\,dx \leqslant A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b f(x)\lg^+ f(x)\,dx + \varepsilon,$$

где константы зависят от ε, но не от f.

Автор рассматривает метрические пространства B, в которых верхняя мера удовлетворяет некоторым заданным условиям, и показывает, что если

$$\overline{f}(x) = \sup \frac{1}{|s|} \int_s f(y)\,dy,$$

где sup взят по всем сферам s с центром в x, то

$$1)\quad \int \overline{f}(x)^p\,dx \leqslant K\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int f(x)^p\,dx,$$

где K — константа, зависящая лишь от метрики пространства B. Если $f \lg^+ f$ интегрируемо, то

$$2)\quad \int_E \overline{f}(x)\,dx \leqslant 2K\int f(x)\lg^+ f(x)\,dx + \left(\frac{4K}{e} + 2\right)|E|$$

для любого измеримого множества E.

Автор прилагает полученные им неравенства к субгармоническим функциям и к сильной дифференцируемости двойных интегралов (подобно тому, как это делалось для неравенств Харди и Литлвуда).

Н. К. Бари

1541. Об асимптотическом значении одного класса определенных интегралов. Аљанчић, Бојанић, Томић (Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies. Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 7, 81—94 (франц.)

Исследуются условия, при которых справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_a^b f(t)\,L(\lambda t)\,dt \sim L(\lambda)\int_a^b f(t)\,dt \quad (\lambda \to \infty), \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f(t)$ — функция, суммируемая в каждом конечном интервале, а $L(t)$ — медленно растущая функция в смысле Караматы (Karamata) (это значит, что $L(t)$ положительна и непрерывна на $[0, \infty)$ и $L(\lambda t)/L(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to \infty$ для каждого фиксированного $t > 0$). В случае $0 < a < b < \infty$ (1) всегда выполняется. Для интервала $(0, b)$, $b < \infty$, устанавливает-

ся следующее достаточное условие выполнения (1): $\int_a^b t^{-\eta}|f(t)|\,dt<\infty$ при некотором $\eta>0$. В случае интервала (a, ∞), $a>0$ доказывается, что любое из нижеследующих условий обеспечивает справедливость (1):

а) $\int_a^\infty t^{\eta}|f(t)|\,dt<\infty$ при некотором $\eta>0$;

б) $L(t)$ монотонно убывает, интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$ сходится;

в) $L(t)$ есть произведение двух монотонных медленно растущих функций, а интеграл $\int_a^\infty t^{\eta} f(t)\,dt$ сходится при некотором $\eta>0$;

г) $L(t)$ есть монотонная выпуклая функция, $L(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $\int_a^x f(t)\,dt=O(1)$ $(x\to\infty)$, интеграл $\int_a^\infty f(t)dt$ суммируется $(C, 1)$, интеграл в левой части (1) сходится при $\lambda>0$.

Теоремы относительно интервала $(0, \infty)$ получаются комбинированием предыдущих теорем.

Б. И. Коренблюм

1542. Рекуррентные формулы для вычисления некоторых эллиптических интегралов, содержащих тригонометрические функции кратных дуг. Романовский В. Б., Сб. тр. Ленингр. электротехн. ин-та связи, 1956, вып. 1, 3—8

Рассматриваются 8 типов эллиптических интегралов:

$$F_{cm}=\int_0^{\varphi}\frac{\cos mx}{\Delta x}\,dx,\qquad E_{cm}=\int_0^{\varphi}\Delta x\cos mx\,dx.$$

$\Delta x=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$; остальные получаются заменой $\cos mx$ на $\sin mx$ или φ на $\frac{\pi}{2}$. Для них имеют место рекуррентные формулы, связывающие интегралы с различными m, что позволяет, понижая m, выразить их через основные эллиптические интегралы и элементарные функции. Работа содержит таблицы рекуррентных формул и явные выражения интегралов для $m=0, 1, 2$.

В. К. Иванов

1543. Об одной общей теореме. Бхатнагар (A general theorem. Bhatnagar K. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 251—252 (англ.)

Пусть

$$\Psi(p)=\int_0^\infty\frac{t^{\nu+s/2}f(t)\,dt}{(t^2+p^2)^{\nu+s/2}}.$$

В обозначениях реф. 1575 доказывается теорема: если $f(t)$ принадлежит $R_{n_1, n_2, \ldots, n_{n-1}, \nu+1}$, то $p^{\nu+\frac{1}{2}}\Psi(p)$ принадлежит соответственно $R_{n_1, n_2, \ldots, n_{n-1}, \nu}$.

Н. Н. Лебедев

1544 К. Преобразование Фурье. Снеддон И. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1955, 668 стр., 29 р. 95 к.

В книге рассматриваются различные виды преобразования Фурье: тригонометрические преобразования Фурье, преобразования Лапласа, Меллина и Ханкеля, кратные преобразования Фурье и Лапласа. Наряду с интегральными преобразованиями с бесконечными пределами, специально рассматриваются преобразования Фурье и Ханкеля с конечными пределами. Для всех этих преобразований выводятся формулы обращения, теоремы умножения и правила преобразования производных и линейных дифференциальных операторов.

Первые три главы посвящены сжатому изложению математической теории интегральных преобразований типа Фурье.

Четвертая и пятая главы содержат приложения к теории колебаний и теплопроводности. В шестой главе излагается теория замедления нейтронов в веществе, причем все рассматриваемые задачи решаются при помощи преобразования Лапласа.

В седьмой главе преобразования Фурье и Ханкеля применяются к решению различных краевых задач гидродинамики.

Восьмая глава посвящена приложениям к атомной и ядерной физике. В качестве основного метода здесь применяется преобразование Лапласа.

Девятая и десятая главы содержат различные краевые задачи теории упругости на плоскости и в пространстве.

В приложении А приводятся некоторые свойства функций Бесселя.

Приложение Б посвящено методам приближенных вычислений интегральных изображений Лапласа и Фурье. Формулируется лемма Ватсона о разложении изображений Лапласа в асимптотические ряды. При помощи этой леммы обосновывается метод перевала. В заключение приводятся приближенные формулы для вычисления интегралов Фурье.

Приложение В содержит таблицы изображений Фурье, Лапласа, Меллина и Ханкеля с бесконечными и конечными пределами для некоторых часто встречающихся функций.

В книге излагается теория дуальных интегральных уравнений, т. е. особый вид интегральных уравнений первого рода с бесконечными пределами и с разрывным ядром, выражающимся через функции Бесселя. Принадлежащий Титчмаршу метод решения таких интегральных уравнений приводит к простой общей формуле решения, используемой автором в различных задачах.

Кроме того, автор приводит и затем применяет основные понятия теории дельта-функции Дирака.

Теоретическая часть книги имеет ряд неточностей, в особенности при обосновании некоторых математических утверждений. Так, нечетко характеризуются те классы функций, к которым применимы рассматриваемые преобразования. Особенно это относится к преобразованиям Меллина и Ханкеля. Нестрого выведена формула обращения преобразования Ханкеля.

Книга Снеддона — руководство к правильному применению математического аппарата к решению трудных конкретных задач физики, механики и техники.

Книга рассчитана на научных работников, интересующихся применением современных математических методов исследования к различным вопросам теоретической физики.

Ю. Л. Рабинович

1545 К. Приближенные методы анализа. Канторович, Крылов (Metode de aproximație ale analizei superioare. Vol. 3. Kantorovici L. V., Krîlov V. I. Inst. studii romîno-sovietic, București, 1956, p. 668—928, il., 12 lei.—Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 7, 254 (рум.)

1546 К. Курс высшей математики. Для студентов III и IV курсов электромеханических техникумов. 2-е издание. Тарасов (Курс по висша математика. За III и IV курс на техникумите по механотехника и електротехника. 2 изд. Тарасов Н. П. Прев. от рус. София, Нар. просв., 1955, 278 стр., 8. 75 лв.), Българ. книгопис, 1955, 59, № 8, 14 (болг.)

1547 Д. О приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду. Сахнович Л. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Харьковск. ун-т, Одесса, 1956

1548 Д. Обобщенные полиномы Эрмита. Тихара (Generalized hermite polynomials. Chihara Theodore Seio.— Doct. diss., Purdue Univ., 1955, Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2223) (англ.)

Статья представляет собой реферат, в котором перечисляются без доказательств основные результаты, полученные автором при исследовании полиномов $R_n^\nu(x)$ и $H_n^\mu(x)$, являющихся обобщением полиномов Эрмита. Полиномы

$$R_n^\nu(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(x^\nu e^{-x^2})$$

совпадают при $\nu = 0$ с полиномами Эрмита и, как указывает автор, изучаются в первой части его работы. Во второй части работы изучаются полиномы $H_n^\mu(x)$, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xy'' + 2(\mu - x^2)y' + (2nx - \theta_n x^{-1})y = 0,$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном}, \\ 2\mu \text{ при } n \text{ нечетном}, \end{cases}$$

которое при $\mu = 0$ совпадает с дифференциальным уравнением для полиномов Эрмита.

Автор отмечает, что полиномы $R_n^\nu(x)$ являются частным случаем полиномов

$$P_n^\nu(x) = e^{|c_\nu|\nu!x^2} \frac{d^n}{dx^n}(x^\nu e^{-|c_\nu|\nu!x^2}),$$

введенных Розенталем (РЖМат, 1954, 3739), и что полиномы $H_n^\mu(x)$ были введены Сегё (Szegö, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1939, **23**, 371).

Далее перечисляются следующие полученные автором результаты. 1. При ν, отличных от нуля, существует простое линейное соотношение, выражающее $R_n^\nu(x)$ через полиномы Эрмита (соотношение не приводится). 2. Полиномы $R_n^\nu(x)$ и $R_m^\nu(x)$ ортогональны с весом e^{-x^2} на интервале $(-\infty, \infty)$ для всех $m \neq n \pm q$ $(q = 1, 2, \ldots, [\nu/2])$. 3. При $\nu \geqslant 2$ никакие три последовательных полинома $R_n^\nu(x)$ не могут быть ортогональны ни на каком интервале и ни при каком весе. 4. Полиномы $R_n^\nu(x)$ являются единственным целым рациональным решением дифференциального уравнения третьего порядка:

$$xy''' + (n - \nu + 2 - 4x^2)y'' + 2(2\nu - 3 + 2x^2)xy' + 2[n^2 + 2n - \nu - 2x^2(n + \nu)]y = 0$$

(первый член ошибочно приведен в виде $x \cdot y''$) и могут быть выражены через обобщенные гипергеометрические функции ${}_2F_2$. 5. Получено дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяют полиномы $R_n^\nu(x)$. 6. Получены простое рекуррентное соотношение, связывающее четыре последовательных полинома $R_n^\nu(x)$, и более сложное, связывающее три последовательных полинома, производящая функция и интегральное представление. 7. Получены основные соотношения для полиномов $H_n^\mu(x)$ (рекуррентные соотношения, производящая функция, нормирующий множитель и др.). 8. Устанавливается связь между полиномами $H_n^\mu(x)$, вырожденными гипергеометрическими функциями и полиномами Лагерра. 9. Полиномы $H_n^\mu(x)$ распространяются на комплексные значения μ. 10 Найдено линейное соотношение между полиномами $R_n^\nu(x)$ и $H_n^\mu(x)$, с помощью которого один из полиномов может быть выражен через другой. Ни один из результатов, касающихся вопросов, упомянутых в пп. 5—10, не приводится. Э. Л. Блох

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1549. О признаках сходимости и расходимости В. Ермакова. О с т р о в с к и й (Sur les critères de convergence et divergence dus à V. Ermakof. O s t r o w s k i A.), Enseign. math., 1956, **1**, № 4, 224—257 (франц.)

Рассматривается признак сходимости и расходимости В. Ермакова.

В. Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывная функция и $\psi(x)$ — положительная, возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\psi(x) > x$ при $x \geqslant a$, производная которой положительна и непрерывна при $x \geqslant a$. Тогда, если удовлетворяется неравенство

$$f(\psi(x))\psi'(x) \leqslant qf(x) \quad (0 < q < 1,\ x \geqslant a), \tag{1}$$

то интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{2}$$

сходится. Если же

$$f(\psi(x))\psi'(x) \geqslant f(x), \quad x \geqslant a, \tag{3}$$

то интеграл (2) расходится.

В первом случае ряд

$$\sum_\nu f(\nu) \tag{4}$$

сходится, во втором — расходится.

Автор замечает, что для справедливости признака В необходимо на $\psi(x)$ дополнительно наложить одно из следующих условий: α) $\psi'(x)$ не убывает, начиная с некоторого x и делается равной или большей 1; β) $\psi'(x)$ не возрастает, начиная с некоторого x.

Доказательство В. Ермакова не вполне строгое. Общеизвестен частный признак Ермакова, когда $\psi(x) = e^x$.

Дается доказательство следующего обобщенного признака:

С. Пусть $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ удовлетворяют прежним условиям. Тогда:

а) Если $f(x)$ положительна, начиная с некоторого x, и суммируема, а $\frac{1}{f(x)}$ остается равномерно ограниченной во всяком конечном подинтервале интервала определения $f(x)$ и если неравенство (3) удовлетворяется, начиная с некоторого x, то ряд (4) расходится.

б) Если же $f(x)$ измерима и положительна, начиная с некоторого x, и остается равномерно ограниченной во всяком подинтервале интервала существования и неравенство (1) удовлетворяется, начиная с некоторого x, то ряд (4) сходится.

Дается пример ряда, сходимость которого доказывается с помощью признака Коши и не может быть доказана с помощью признака Ермакова при $\psi(x) = e^x$. Рассматривается применение этого признака к анализу сходимости различных рядов.

В. Ермаков утверждал, что признаки, основанные на использовании функций $\psi_1(x) = \psi(x), \ldots, \psi_{n+1}(x) = \psi(\psi_n(x))$, равносильны, но строгого доказательства этого утверждения не дал.

Доказывается, что из применимости к какому-либо ряду признака, основанного на использовании функции $\psi(x)$, следует применимость и признака, основанного на использовании функции $\psi_n(x)$.

Строится ряд, сходимость которого не может быть доказана с помощью признака, основанного на $\psi(x) = x^2$, но может быть доказана с помощью признака, основанного на $\psi_2(x) = x^4$.

Ермаков утверждал, что если $\psi_2(x) \geqslant \psi_1(x)$, то признак, основанный на использовании $\psi_2(x)$, сильнее при-

знака, основанного на использовании $\psi_1(x)$. Доказывается, что это вообще не верно. Для того чтобы из доказательства сходимости при предположении невозрастания $f(x)$, полученного с помощью $\psi_1(x)$, всегда следовала возможность доказательства сходимости с помощью $\psi_2(x)$, достаточно чтобы из неравенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\psi_1(x))\,\psi_1'(x)}{f(x)} < 1$$

при любой невозрастающей $f(x)$, следовало неравенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\psi_2(x))\,\psi_2'(x)}{f(x)} < 1.$$

В этом случае функция $\psi_1(x)$ подчинена $\psi_2(x)$. Отыскиваются функции, которым подчинены $\psi_1(x) = x+1$ и $\psi_2(x) = x^k$ (k — любое число >1). Имеются и некоторые другие результаты. Б. М. Гагаев

1550. Ряды с положительными членами. Клуни (Series of positive terms. Clunie J.), J. Univ. Bombay, 1955, **24**, № 3, A10—A12 (англ.)

Относительно рядов

$$\sum_1^\infty a_n \qquad (1)$$

с положительными монотонно убывающими членами, известны следующие две теоремы:

1) Ряды $\sum_{n=1}^\infty a_n$ и $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ одновременно сходятся и расходятся (теорема Коши);

2) $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, если ряд (1) сходится (теорема, называемая автором теоремой Абеля).

В работе доказывается справедливость теоремы Коши для рядов $\sum_{n=1}^\infty f(n)$, где $f(x)$ — такая неотрицательная функция, что $V_\alpha^\infty\{f(x)\} \leqslant \varphi(\alpha)$, где $\varphi(x)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, удовлетворяющая условию $\sum_1^\infty \varphi(n) < \infty$.

На примерах показано, что теорема Коши не справедлива, если $f(x)$ — неотрицательная функция с ограниченной вариацией, но $\sum_1^\infty \varphi(n)$ расходится, а теорема, называемая теоремой Абеля, вообще не справедлива при тех предположениях, при которых доказана в работе теорема Коши.

Примечание референта. Теорема, называемая теоремой Абеля, по-видимому, впервые была доказана Борелем (Borel É., Leçons sur les fonctions entières, Paris, 1900, стр. 17). На стр. A 10 вместо $\varphi(\infty)$ напечатано $\varphi(\alpha)$. Б. М. Гагаев

1551. Об одной задаче Виго Бруна. Кольберг (Über ein Problem von Viggo Brun. Kolberg O.), Math. scand., 1955, **3**, № 2, 221—223 (нем.)

Брун (Brun V., Norsk mat. tidsskr., 1951, **33**, 99) предложил найти

$$s = \sum_{n=0}^\infty n^n (n+2)^{-(n+2)} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^2}{4^4} + \frac{3^3}{5^5} + \dots$$

Показывается, что

$$s = \frac{1}{2} - \int_0^\infty u^u (u+2)^{-(u+2)}\,du.$$

Халворсен (Halvorsen S., Norsk mat. tidsskr., 1952, **34**, 95—96) ошибочно указал, что $s = 1/2$. В. И. Левин

1552. Об одном лакунарном степенном ряде. Бернацкий (O pewnym szeregu potęgowym lakunarnym. Biernacki M.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, ser. 1, **1**, № 2, 264—271 (польск.; рез. русс., англ.)

Будем говорить, что функции f и φ асимптотически равны в точке a, если $\lim_{x\to a} f(x)[\varphi(x)]^{-1} = 1$. Автор доказывает, что функция $f(x)$, заданная лакунарным степенным рядом $\sum_{n=0}^\infty x^{n!}$, асимптотически равна в точке 1 элементарным функциям $\varphi_1(x) = \{\ln[\ln(1-x)^{-1}]\}^{-1}\ln(1-x)^{-1}$, $\varphi_2(x) = \{\ln[x^{-1}\ln(1-x)^{-1}]\}^{-1} \times \ln(1-x)^{-1}$.

Кроме того, автор отмечает, что функции f и φ_2, рассматриваемые в комплексной области, голоморфны в круге $|z|<1$, однако только функция φ_2 продолжима за этот круг. K. Tatarkiewicz

1553. Методы суммирования ограниченных последовательностей. Питерсен (Summability methods and bounded sequences. Petersen G. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 324—326 (англ.)

Доказывается теорема: если регулярные матричные методы A и B суммируют ограниченную последовательность $\{s_n\}$ к различным суммам, тогда найдется такая ограниченная последовательность, которая суммируется методом A, но не суммируется методом B. Автор отмечает, что из его теоремы вытекает одна теорема Брудно (Брудно А., Матем. сб., 1945, **16**, 191—247). М. П. Щеглов

1554. О суммируемости по Чезаро ряда Лежандра. Оссичини (Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Legendre. Ossicini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 521—526 (итал.)

Если функция $f(x)(1-x^2)^{-1/4}$ суммируема по Лебегу в интервале $(-1,1)$ и

$$a_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^1 f(x)\,P_m(x)\,dx, \qquad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $P_m(x)$ — полиномы Лежандра, то для $0<\lambda<1$ ряд

$$a_0 + \sum_{m=1}^\infty a_m m^{-\lambda} P_m(x)$$

суммируем $(C, -\lambda)$ почти всюду в интервале $(-1,1)$. В. И. Левин

1555. Ядра расходимости. Эро (Les noyaux de divergence. Eyraud Henri), Ann. Univ. Lyon, 1953, Sec. A, № 16, 25—36 (франц.)

Автор исследует числовые ряды с положительными членами, монотонно стремящимися к нулю, используя понятия из теории вероятности. Ряд $\sum_n a_n$ вполне расходящийся, если он асимптотически мажорирует любой условно сходящийся ряд $\sum_n b_n$ (также с положительными монотонно убывающими членами), т. е. если для некоторых p и N имеют место следующие неравенства: $b_{n+p} \leqslant a_n$ для $n > N$.

Автор доказывает, что гармонические ряды вполне расходятся. Ядром сходимости рядов $\sum_n a_n$ автор называет множество всех подпоследовательностей индексов $n_1, n_2, \dots$ ($n_k < n_{k+1}$), для которых существуют монотонно сходящиеся ряды $\sum_n b_n$, члены которых удовлетворяют неравенствам $a_{n_k} \leqslant b_{n_k}$ для $k = 1, 2, \dots$

Дополнение к ядру сходимости называется ядром расходимости. Статья содержит доказательства теорем о структуре этих ядер. Заключительная теорема указывает, что ядро расходимости наибольшей асимптотической миноранты двух расходящихся рядов является общей частью ядра расходимости этих рядов. K. Urbanik

1556. Нелинейные преобразования расходящихся и условно сходящихся последовательностей. Шанкс (Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences. Shanks Daniel), J. Math. and Phys., 1955, 34, № 1, 1—42 (англ.)

Автор занимается проблемой улучшения сходимости рядов.

Определяется семейство преобразований $e_k(A_n)$ последовательности $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ с помощью формул: $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$

$$B_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \dots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \dots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \dots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{n-1} & \dots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \dots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{n-1} & \dots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}, \quad (1)$$

$$(n = k,\ k+1, \dots)$$

Если при некотором n в дроби (1) знаменатель равняется нулю, то при этом n полагается $B_n^{(k)} = \infty$. Если и числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то $B_n^{(k)} = B_n^{(k-1)}$. Преобразования $e_k(A_n)$ нелинейны.

Из последовательностей $\{B_n^{(k)}\}$ можно образовать диагональную последовательность $B_1^{(1)}, B_2^{(2)}, B_3^{(3)}, \dots$ Так определяется преобразование $e_d(A_n)$. Итерационный процесс приводит к новым нелинейным преобразованиям: $e_k^2(A_n) = e_k(B_n^{(k)}) = C_n^{(k)}$ $(n \geqslant 2k)$, $e_k^3(A_n) = e_k(C_n^{(k)})$ $(n \geqslant 3k)$ и т. д. При $k = 1$ получаем производные последовательности $B_n = e_1(A_n) = \dfrac{A_{n+1}A_{n-1} - A_n^2}{A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n}$, $(n = 1, 2, \dots)$, $C_n = e_1^2(A_n)$ $(n = 2, 3, \dots)$, $D_n = e_1^3(A_n)$ $(n = 3, 4, \dots)$. Образуем диагональную последовательность $A_0, B_1, C_2, D_3, \dots$ Так определяется преобразование $\tilde{e}_1(A_n)$.

Полезность применения подобных преобразований иллюстрируется следующим примером: для того чтобы получить сумму сходящегося ряда

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

с точностью до восьмого знака, нужно просуммировать 40 000 000 слагаемых. Если к последовательности частных сумм этого ряда применить преобразование $\tilde{e}_1$, то уже пятый член полученной последовательности равен π с точностью до восьмого знака.

Преобразование $e_1(A_n)$ нерегулярно, но если последовательности $\{A_n\}$ и $\{e_1(A_n)\}$ обе сходятся, то их пределы равны.

Устанавливается связь введенных преобразований с различными вопросами анализа.

Из доказанных теорем приведем следующие две:

Теорема I. Если A_n есть частная сумма ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} f(\nu)/g(\nu)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы порядка m_1 и m_2 $(g(\nu) \not\equiv 0)$, то при $m_1 < m_2$ последовательность $\{A_n\}$ и производные последовательности $\{e_1^s(A_n)\}$, $s = 1, 2, \dots$, сходятся к сумме ряда, причем последовательность $\{e_1^s(A_n)\}$ сходится быстрее, чем $\{e_1^{s-1}(A_n)\}$. При $m_1 \geqslant m_2$ последовательности $\{e_1^s(A_n)\}$, $s = 1, 2, \dots, m-1$, где $m = \left[\frac{1}{2}(m_1 - m_2)\right]$, расходятся. Последовательности $\{e_1^s(A_n)\}$, $s = m, m+1, \dots$, сходятся к одному и тому же числу.

Теорема IV. Если A_n есть частная сумма степенного ряда для функции

$$f(z) = c/(z - z_0)(z - z_1), \quad 0 < |z_0| < |z_1|,$$

и

$$z_r = z_0\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^r,$$

то в круге $|z| < |z_m|$, за исключением точек $z = z_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, m-1)$, имеем $e_1^{(m)}(A_n) \to f(z)$. В точках $z = z_0$ и $z = z_1$ $e_1^{(m)}(A_n) \to \infty$. В точках $z = z_\nu$ $(\nu = 2, \dots, m-1)$ $e_1^{(m)}(A_n)$ сходится, но не к значению $f(z_\nu)$. В окрестности точки $z = z_\nu$ сходимость неравномерна. Ф. И. Харшиладзе

1557. Последовательности нулей и единиц и методы суммирования Теплица. Питерсен (Sequences of O's and 1's and Toeplitz methods of summability. Petersen G. M.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 3, 174—175 (англ.)

Доказывается, что для каждой регулярной матрицы $A = (a_{mn})$ существует последовательность из нулей и единиц, не содержащая ни одной тройки последовательных нулей или последовательных единиц, которая при помощи A не суммируема. Г. Ф. Кангро

1558. Некоторые результаты о полном включении для суммирования по Нёрлунду. Дебн (Some results on total inclusion for Nörlund summability. Debi Sobha), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 3, 135—141 (англ.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы регулярный метод суммирования Вороного — Нёрлунда (N, q_n) вполне включал такой же метод (N, p_n), где $p_n, q_n \geqslant 0$, $p_0, q_0 > 0$. Из этих условий без труда выводятся следующие результаты: 1) регулярный метод (N, q_n), где $q_n \uparrow$, вполне включает метод суммирования арифметических средних; 2) два регулярных вполне равносильных метода Вороного — Нёрлунда тождественны; 3) метод $(N, \cosh n^{1/2})$ не может вполне включать метод суммирования Чезаро (C, α) при $\alpha \geqslant 1{,}55$; 4) метод Рисса (R, n, α), т. е. метод (N, q_n) с $q_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, не может вполне включать метод (C, α) при $0 < \alpha < 1$.

Имеются опечатки, например в условии (2), которое на деле является излишним в теореме 1, поскольку оно вытекает из условия $k_n \geqslant 0$. Г. Ф. Кангро

1559. Об абсолютной суммируемости лакунарных рядов. Обрешков (Sur la sommation absolue des series lacunaires. Obrechkoff N.), Докл. Болгар. АН, 1955, 8, № 4, 1—4 (франц.; рез. русс.)

Рассматриваются методы абсолютного суммирования $|C, k|$ (Чезаро) и $|R, \lambda, k|$ (Рисса) (всюду $k > 0$) для рядов

$$\sum_0^{\infty} u_n \quad (1)$$

(и интегралов $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$).

Получены следующие основные результаты:

1. Пусть $\{n_\nu\}$ и $\{m_\nu\}$ — последовательности возрастающих целых чисел таких, что

$$\frac{m_\nu}{n_\nu} > q > 1, \quad m_\nu \leqslant n_{\nu+1}.$$

Предположим, что члены ряда (1) удовлетворяют условию $u_n = 0$, $n_\nu < n < m_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, и этот ряд C, k |-суммируем. Тогда ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\sum_{n=m_\nu}^{n_{\nu+1}} u_n|$ сходится.

2. Если ряд (1) $|R, \lambda, k|$-суммируем и $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1$,

тогда этот ряд абсолютно сходится. Имеются опечатки: в формуле (3) верхним индексом у знака суммы должно быть n, в формуле (14) верхний предел интеграла должен быть α_{n+1}. М. П. Щеглов

1560. Несколько замечаний о некоторых общих методах суммирования рядов. Биринделли (Qualche osservazione su alcuni generali procedimenti di sommazione delle serie. Birindelli Carlo), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 127—141 (итал.)

Пусть на неограниченном множестве A точек P r-мерного пространства определена последовательность ограниченных неотрицательных функций $f_k(P)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, таких, что

$$f_0(P) \geqslant f_1(P) \geqslant \cdots \geqslant f_k(P) \geqslant \ldots,$$

$$\lim_{P \to \infty} f_k(P) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для заданного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и любой точки $P \in A$ положим

$$F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} f_k(P)\, u_k,$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} F_n(P) = F'(P), \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} F_n(P) = F''(P).$$

Тогда пределы

$$\overline{\lim}_{P \to \infty} F'(P), \quad \underline{\lim}_{P \to \infty} F''(P)$$

называются соответственно максимальной и минимальной обобщенной суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ по A относительно последовательности $\{f_k(P)\}$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируем по A относительно последовательности $\{f_k(P)\}$ к сумме S, если $\overline{\lim}_{P \to \infty} F'(P) = \underline{\lim}_{P \to \infty} F''(P) = S$ (Mauro Picone, Ann. mat. pura ed appl., 1924—1925, 2, № 4).

Вводится следующее определение максимальной и минимальной суммы ряда.

Пусть A_P — множество точек $Q \in A$, расстояние которых от начала O не меньше OP. Положим:

$$F_n(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} u_k f_k(P) f_k(Q),$$

$$F'(P, Q) = \overline{\lim}_{n \to \infty} F_n(P, Q), \quad F''(P, Q) = \underline{\lim} F_n(P, Q),$$

$$\Psi(P) = \overline{\lim_{Q \to \infty}} F'(P, Q), \quad \Phi(P) = \underline{\lim}_{Q \to \infty} F''(P, Q).$$

Максимальная и минимальная суммы ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ определяются соответственно как пределы $\overline{\lim}_{P \to \infty} \Psi(P)$, $\underline{\lim}_{P \to \infty} \Phi(P)$.

Интервал неопределенности второго метода суммирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ содержится в интервале неопределенности первого метода того же ряда. Используя приведенную схему, автор дает обобщение метода суммирования Абеля.

Рассмотрены также применения некоторых методов суммирования в теории аналитического продолжения. М. Д. Калашников

1561. Подметоды регулярных матричных методов суммирования. Гофман, Питерсен (Submethods of regular matrix summability methods. Gof f man Casper, Petersen G. M.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 40—46 (англ.)

Подметодом матричного метода суммирования A называется метод, определяемый матрицей, которая получается из A путем удаления каких-либо ее строк. Между подметодами метода A и точками интервала $0 < \xi \leqslant 1$ устанавливается взаимно однозначное соответствие следующим образом. Число ξ представляется в виде бесконечной двоичной дроби $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ и ему ставится в соответствие подметод $A(\xi)$ метода A, который определяется матрицей, получаемой из A путем удаления строк с теми и только с теми номерами n, для которых $a_n = 0$. Автор называет категорией и мерой некоторого множества подметодов $A(\xi)$ категорию и меру множества точек ξ, соответствующих этим подметодам. Доказываются следующие теоремы: 1. Если $\{s_n\}$ — ограниченная последовательность, не суммируемая регулярным методом A, то множество подметодов метода A, которые суммируют $\{s_n\}$ является множеством первой категории и имеет меру 0 или 1 (оба значения возможны). 2. Если метод A регулярен, то множество точек ξ, которым соответствуют подметоды $A(\xi)$, эквивалентные A, есть множество первой категории. 3. Если метод A регулярен, то существуют эквивалентные ему методы B и C такие, что для почти всех ξ метод B эквивалентен $B(\xi)$, а $C(\xi)$ сильнее C. 4. Множество подметодов метода $(C, 1)$, эквивалентных $(C, 1)$, имеет меру 1. В. М. Даревский

1562. О классах методов суммирования, содержащих класс хаусдорфовых методов как частный случай. Эндль (Über Klassen von Limitierungsverfahren, die die Klasse der usdorffschen Verfahren als Spezialfall enthalten. Endl Kurt), Math. Z., 1956, 65, № 2, 113—132 (нем.)

Изучаются матричные методы суммирования $(M^{(k)}, \mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, определенные при помощи преобразования последовательности в последовательность матрицей $\delta^{(k)} \mu \delta^{(k)}$, где μ — произвольная диагональная матрица и

$$\delta^{(k)} = \left((-1)^{n_k} \binom{m_k}{n_k} \delta_{mn}^{(k)} \right),$$

причем $\delta_{mn}^{(k)} = 1$ при $m \equiv n \pmod{k}$ и $\delta_{mn}^{(k)} = 0$ в противном случае, а m_k, n_k определяются из соотношений $m = m_k^* + m_k \cdot k$, $n = n_k^* + n_k \cdot k$ $(0 \leqslant m_k^*, n_k^* < k)$. В частности, метод $(H, \mu) = (M^{(1)}, \mu)$ является известным хаусдорфовым методом суммирования (Харди, Расходящиеся ряды. Изд-во ин. лит., М., 1951, гл. XI), основные свойства которого переносятся автором на все методы $(M^{(k)}, \mu)$.

Показывается, что применение метода $(M^{(k)}, \mu)$, $\mu = (\mu_n)$ к последовательности $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ равносильно применению хаусдорфовых методов $(H, \mu^{(\rho)})$, $\mu^{(\rho)} = \mu_{\rho+nk}$ $(\rho = 0, 1, \ldots, k-1)$ к подпоследовательностям $\{s_{\rho+kn}\}$. На примере выясняется, что метод

$(M^{(k)}, \mu)$ может суммировать последовательности, не суммируемые никаким методом $(H, \mu^{(p)})$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^{(k)}$ класс методов $(M^{(k)}, \mu)$, соответствующих всем диагональным матрицам μ. Доказывается, что пересечение $\mathfrak{M}^{(k)} \cap \mathfrak{M}^{(l)}$ $(k \neq l)$ состоит лишь из некоторых тривиальных методов суммирования, матрицы которых являются диагональными.

Наконец, устанавливается, что геометрический ряд Σz^n суммируется методом $(M^{(k)}, \mu)$ в каждой точке области, ограниченной овалом Кассини $|z^k - (1-1/r)| = 1/r$ (r — постоянная, зависящая от $(M^{(k)}, \mu)$, причем $0 < r \leqslant 1$), но не суммируется ни в какой внешней точке этой области. При помощи этого результата показывается, что в каждом классе $\mathfrak{M}^{(k)}$ существует счетное множество методов суммирования, являющихся попарно несравнимыми (в смысле включения). Г. Ф. Кангро

1563. Суммирование интегралов Лапласа — Стилтьеса. Бозанке (The summability of Laplace —Stieltjes integrals. Bosanquet L. S.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, ser. 3, № 11, 267—304 (англ.)

Пусть $A(u)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале. В статье содержится обзор некоторых результатов, связанных с суммированием по Риссу интеграла

$$\int_0^\infty e^{-su}\, dA(u), \qquad (1)$$

где $s = \sigma + i\tau$. Следующие известные предложения дают представление о проблематике реферируемой работы и послужили для автора исходным пунктом исследования:

A. Если интеграл

$$\int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du \qquad (2)$$

суммируем $(C, k-1)$ для каждого $\sigma > \sigma_0$, где $k \geqslant 1$, $\sigma_0 \geqslant 0$, то интеграл (1) суммируем (C, k) для $\sigma > \sigma_0$.

B. Если интеграл (1) суммируем (C, k) для каждого $\sigma > \sigma_0$, где $k \geqslant 1$, $\sigma_0 > 0$, то (2) суммируем $(C, k-1)$ для $\sigma > \sigma_0$.

Пусть

$$A_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x (x-u)^{k-1} A(u)\, du.$$

C. Если

$$A_k(x) = o(e^{\sigma x}) \quad (x \to \infty) \qquad (3)$$

для каждого $\sigma > \sigma_0$, где $k \geqslant 0$, $\sigma_0 \geqslant 0$, то (1) суммируем (C, k) для $\sigma > \sigma_0$.

D. Если (1) суммируем (C, k) для каждого $\sigma > \sigma_0$, где $k \geqslant 0$, $\sigma_0 > 0$, то (3) выполняется для $\sigma > \sigma_0$.

Предложения A и B могут быть получены из C и D. С другой стороны, если k целое, C и D могут быть выведены из случая $k = 0$ с помощью A и B.

Айзакс (РЖМат. 1954, 5649) показал, что предложения A и B могут быть обобщены так, чтобы охватывать дробное изменение порядка суммирования (этот результат в работе приводится подробно). Тогда предложения C и D могут быть получены для дробных k из случая $k = 0$.

Существенное место в работе занимает следующая теорема:

для того чтобы интеграл (1) (при фиксированном $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$) был суммируем (C, k) (или $|C, k|$) к числу C, причем $k \geqslant 0$, $\sigma_0 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число A (произвольное, если $\sigma_0 > 0$) такое, что $e^{-s_0 x}(A(x) - A) = o(1)$ (C, k) [или $|C, k|$] при $x \to \infty$, $\int_0^\infty s_0 e^{-s_0 u} \{A(u) - A\}\, du$ суммируем (C, k) или $|C, k|$ к $C = A + A(0)$.

Результат справедлив также для $s_0 = 0$; если $s_0 = i\tau$, то условия достаточны.

Результаты работы переносятся также на интегралы Меллина — Стилтьеса

$$\int_1^\infty v^{-s}\, dB(s).$$

В работе приведено много примеров, показывающих, что основные результаты статьи не могут быть улучшены. Б. М. Левитан

1564. Заметка о множителях суммируемости. Боруэйн (Note on summability factors. Borwein D.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 2, № 114, 198—266 (англ.)

Пусть $x(t)$ — вещественная измеримая функция на $(1, \infty)$. Интеграл $\int_1^\infty x(t)\, dt$ суммируем методом $|C, \lambda|$ $(\lambda > 0)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty t^{-\lambda-1}\, dt \left| \int_1^t (t-u)^{\lambda-1} u x(u)\, du \right| < \infty.$$

Для того чтобы интеграл $\int_1^\infty k(t) x(t)\, dt$ был суммируем методом $|C, \lambda|$, $(\lambda > 0)$ для любой функции $x(t)$ такой, что интеграл $\int_1^\infty x(t)\, dt$ суммируется этим методом, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $c > 1$ $k(t)$ была измерима и существенно ограничена на $(1, c)$, а также, чтобы на (c, ∞)

$$\frac{k(t)}{t} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_t^\infty (u-t)^{\lambda-1} h(u)\, du,$$

где $u^{\lambda+1} h(u)$ — измеримая, существенно ограниченная на (c, ∞) функция.

Доказательство проводится методами функционального анализа. А. Ф. Тиман

1565. Об аналоге теоремы Абеля для бесконечных произведений. Слепенчук К. М., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 1, 19—21

Доказывается следующая теорема: для того чтобы для любого сходящегося произведения $\Pi_{n=1}^\infty (1 + u_n) = Q$, где $\Sigma_{n=1}^\infty |u_n|^{2p} < \infty$, $p > 1$, выполнялось условие $\lim_{x \to 1} \Pi_{n=1}^\infty (1 + u_n x^{k_n}) = Q$, необходимо $\left(\text{если } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ и достаточно $\left(\text{если } \frac{1}{q} + \frac{1}{2p} = 1\right)$, чтобы

$$\frac{k_1^q + k_2^q + \cdots + k_n^q}{k_n^q} < M \qquad (M = \text{const}).$$

Я. И. Житомирский

1566. О суммировании кратных рядов и интегралов Фурье. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 6, 1073—1076

Пусть $R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{|\alpha| < \mu} \left(1 - \frac{|\alpha|^2}{\mu^2}\right)^s E(\alpha) \times e^{i(\alpha, x)}\, d\alpha$, где $(\alpha, \alpha) = |\alpha|^2 = \Sigma_{k=1}^n \alpha_k^2$, а $E(\alpha)$ — преобразование Фурье $f(x)$, т. е.

$$E(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(x) \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n)}\, d\alpha.$$

Теорема. Если $f(x) \in L_2(E_n)$ непрерывна всюду со всеми производными до порядка $\lambda > 0$, то равно-

мерно в каждой конечной области

$$\lim_{\mu\to\infty} R_{k-\lambda}(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(k-\lambda+1)} f(x),$$

где $n = 2k+1 \geqslant 3$. Приведено доказательство для случая $n = 3$. Утверждаются аналогичные теоремы относительно производных. Р. А. Александрян

1567 К. Курс высшей математики (Учебник для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов и для втузов с расшир. программой). Т. I. Изд. 16-е, испр. **Смирнов В. И.** М., Гостехиздат, 1956, 478 стр., илл., 11 р. 40 к

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1568. К теории гамма-функций, ζ-функций Римана и других родственных им функций. I. Миколаш (Zur Theorie der Gammafunktion, der Riemannschen Zetafunktion und verwandter Funktionen. I. Mikolás Miklós), Acta math. Akad. Sci. hung., 1955, 6, № 3—4, 381—438 (нем.; рез. русс.)

В основу работы положено изучение рациональной функции $\beta_p(z, n) = \Sigma_{k=0}^{n-1}(z+k)^p$ и связанной с ней функции Бернулли $\beta_p(z, n) = p![B_{p+1}(z+n) - B_{p+1}(z)]$ Затем подробно изучаются функции

$$\Psi(z) = \lim_{n\to\infty}[\log n - \beta_{-1}(z, n)] \text{ и } \Gamma(z) = \exp\int_1^z \Psi(t)\,dt.$$

Даются новые аналитические представления функции $\Psi(z)$, постоянной Эйлера — Маскерони и др. Отметим формулу

$$\Psi(z) + (\gamma + 2\log 2) + \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sec\frac{\pi u}{2}\left[1 - \frac{\cos\pi u\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi z}\right]du.$$

Из других интегральных представлений следует выделить формулу

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty u^{z-1}e^{-u}\,du +$$

$$+ \frac{\pi}{\sin\pi z}\int_0^1 e^{\cos\pi u}\cos(\pi u z + \sin\pi u)\,du$$

и выражение для ζ-функции Гурвитца

$$\zeta(v+1, z+1) = \frac{(-1)^{v+1}}{v!}\left[\frac{d^v}{dz^v}\left(\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi z\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \operatorname{tg}\frac{\pi u}{2}\frac{\partial^{v-1}}{\partial z^{v-1}}\left(\frac{\sin\pi z u}{\sin\pi z}\right)du\right.$$

Н. С. Кошляков

1569. Новые интегралы, содержащие функции Бесселя. Рагаб (New integrals involving Bessel functions. Ragab F. M.), Acta math., 1956, 95, № 1—2, 1—8 (англ.)

Известную формулу

$$K_m(x)K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi x}\sum_{i,\,-i}\frac{1}{i}$$

$$E\times\left(\frac{1+m+n}{2}\quad\frac{1+m-n}{2},\frac{1+n-m}{2}\quad\frac{1-n-m}{2}:\frac{1}{2}:e^{i\pi x^2}\right)$$

(РЖМат, 1955, 5107) автор использует для вычисления интегралов, содержащих функции Бесселя.

К. М. Слепенчук

1570. Об обобщении полиномов Эрмита. I. Чаттерджи (On a generalisation of Hermite's polynomial. I, Chatterjee Phatik Chand), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, №1, 27—41 (англ.)

Обобщаются обыкновенные полиномы Эрмита целого порядка и изучаются их свойства. Эти обобщенные полиномы имеют вид

$$H_{km}(z) = e^{z^k}D_{(k)}^{(km)}(e^{-z^k}),$$

$$H_{km+1}(z) = -e^{z^k}D_{(k)}^{(km+k-1)}(e^{-z^k}),$$

где m и mk — положительные числа (включая нуль), $k \neq 0$ может быть и дробным, а D — дифференциальные операторы:

$$D_{(k)}^{(k)} = \frac{1}{dz}\frac{1}{z^{k-2}}\frac{1}{dz}, \quad D_{(k)}^{(k+1)} = \frac{d}{dz}D_{(k)}^{(k)},$$

$$D_{(k)}^{(k-1)} = \frac{1}{z^{k-2}}\frac{a}{dz};$$

$D_{(k)}^{(km)}$ обозначает операторы $D_{(k)}^{(k)}$, действующие на функцию последовательно m раз. К. М. Слепенчук

1571. О многочленах Якоби и ультрасферических. Тоскано (Sui polinomi di Jacobi e ultrasferici. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 2, 195—201 (итал.)

Пусть $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ — общий многочлен Якоби и

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda, n)}{\left(\lambda+\frac{1}{2}, n\right)}P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\,\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

где $(a, n) = a(a+1)\ldots(a+n-1)$. Доказывается, что

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = e^{in\theta}P_n^{(2\lambda-1,\,-n-\lambda)}(z), \qquad (1)$$

где $z = \dfrac{\cos\theta - 3i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$. Даны некоторые приложения формулы (1). Например,

$$[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)]^2 = \left[\frac{(2\lambda, n)}{n!}\right]^2 {}_3F_2\left(\frac{-n,\ n+2\lambda,\ \lambda}{\lambda+\frac{1}{2},\ 2\lambda};\ \sin^2\theta\right).$$

И. П. Натансон

1572. К теории полиномов Эрмита — Чебышева. Кузьмин Р. О., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 14, 9—15

Статья новых результатов не содержит.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1573. Характеристика преобразований Фурье — Стилтьеса. Эберлейн (Characterizations of Fourier—Stieltjes transforms. Eberlein W. F.), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 465—468 (англ.)

Пусть G — абелева локально компактная группа, $\widetilde{G}$ — ее группа характеров. Будем говорить, что комплекснозначная функция $\varphi(x)$ $(x \in G)$ удовлетворяет

условию (B), если существует константа M такая, что

$$\left|\sum a_n \varphi(x_n)\right| \leqslant M \sup_{\widetilde{x}\in\widetilde{G}} \left|\sum a_n(x_n, \widetilde{x})\right| \qquad (1)$$

для любого конечного набора чисел $\{a_n\}$ и точек $\{x_n\}$ из G.

Теорема 1. Если $\varphi(x)$ измерима и удовлетворяет условию (B), то существует (единственная) мера Радона $\widetilde{\mu}$ на $\widetilde{G}$ такая, что

$$\varphi(x) = \int_{\widetilde{G}} (x, \widetilde{x})\, d\widetilde{\mu}(\widetilde{x}) \qquad (2)$$

почти везде на G; при этом $\|\widetilde{\mu}\| \leqslant M_0$, где M_0 — минимальное значение M в (1). Если $\varphi(x)$ непрерывна, то (2) имеет место всюду и $\|\widetilde{\mu}\| = M_0$.

Для группы действительных чисел (R_1) и непрерывных $\varphi(x)$ этот результат принадлежит Бохнеру (Bochner S., Bull. Amer. Math. Soc., 1934, 40, 271—276). Обобщение на измеримые функции $\varphi(x)$ на R_1 принадлежит Филлипсу (Phillips R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 69, 312—323).

Примечание референта. Теорема 1 для непрерывных $\varphi(x)$ была установлена М. Г. Крейном (ДАН, 1940, 29, № 4), работа которого, по-видимому, неизвестна автору. Б. И. Коренблюм

1574. Обращение и инварианты обобщенного преобразования Ханкеля. Станкович (Inversion et invariantes de la transformation généralisée de Hankel. Stanković B.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 37—52 (франц.)

Доказана теорема: из равенства

$$G(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu+1, \nu; -x^\nu y)\, y^\mu g(y)\, dy, \quad \nu > 0,\ \mu > -1, \qquad (1)$$

где

$$\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu+\nu k)},$$

следует

$$x^{(\mu+1)(\nu-1)/\nu}\, g(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu}, \frac{1}{\nu}; -x^{1/\nu} y\right) y^\mu G(y)\, dy, \qquad (2)$$

если указанные интегралы сходятся, а $x^\mu g(x)$ есть L-функция (терминологию см. РЖМат, 1956, 8933). При $\nu = 1$ формула (1) сводится к преобразованию Ханкеля. Указывается, что при более сильных ограничениях относительно убывания функции $g(x)$ при $x \to \infty$ формулу (2) получил Агарвал (Agarval R. P., Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1950, 64, 164—168).

При определенных условиях находятся явные выражения инвариантов преобразования (1), т. е. решений уравнения

$$g(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu+1, \nu; -x^\nu y)\, y^\mu g(y)\, dy.$$

Ю. И. Черский

1575. Некоторые самосопряженные функции. Бхатнагар (Some self-reciprocal functions. Bhatnagar K. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 245—250 (англ.)

Функция $f(x)$ называется самосопряженной по отношению к преобразованию с ядром $\omega(xy)$, если она удовлетворяет уравнению

$$f(x) = \int_0^\infty f(y)\, \omega(xy)\, dy.$$

В ранее опубликованных работах (РЖМат, 1955, 844, 2724; 1956, 7442) автором рассматривались классы самосопряженных функций $R_{\mu,\nu}$, $R_{\mu,\nu,\lambda}$ и $R_{n_1, n_2, \ldots, n_n}$ для преобразований с ядрами

$$\omega_{\mu,\nu}(xy) = (xy)^{1/2} \int_0^\infty J_\nu(t)\, J_\mu\left(\frac{xy}{t}\right)\frac{dt}{t} \qquad (\mu, \nu > -1/2),$$

$$\omega_{\mu,\nu,\lambda}(xy) = \int_0^\infty \frac{J_\lambda(t)}{t^{1/2}}\, \omega_{\mu,\nu}\left(\frac{xy}{t}\right) dt \qquad (\mu, \nu, \lambda > -1/2),$$

$$\omega_{n_1, n_2, \ldots n_n}(xy) = \int_0^\infty \frac{J_{n_n}(t)}{t^{1/2}}\, \omega_{n_1, n_2, \ldots n_n}\left(\frac{xy}{t}\right) dt$$

$$(n_1, n_2, \ldots, n_n > -1/2).$$

Устанавливаются некоторые соотношения, существующие между рассматриваемыми ядрами при частных значениях индексов. В специальных случаях ядра данного типа выражаются через функции Бесселя, например, $\omega_{\nu-1,\nu}(xy) = J_{2\nu-1}(2\sqrt{xy})$.

Приведены примеры функций, принадлежащих к рассматриваемым классам. Н. Н. Лебедев

1576. Некоторые теоремы о самосопряженных функциях. Бхатнагар (Certain theorems on self-reciprocal functions. Bhatnagar K. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 1, 43—52 (англ.)

Если положить

$$\omega_{n_1 n_2 \ldots n_n}(xz) = (xz)^{1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty J_{n_1}(t_1)\, J_{n_2}(t_2) \ldots J_{n_{n-1}}(t_{n-1})\, J_{n_n} \times$$

$$\times \left(\frac{xz}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}}\right) \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \ldots \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}},$$

где $\operatorname{Re}\left(n_k + \frac{1}{2}\right) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то из

$$g(x) = \int_0^\infty \omega_{n_1 n_2 \ldots n_n}(xz)\, f(z)\, dz$$

формально следует, что

$$f(x) = \int_0^\infty \omega_{n_1 n_2 \ldots n_n}(xz)\, g(z)\, dz.$$

Изучаются самосопряженные при этом преобразовании функции, т. е. такие функции, для которых $g(x) \equiv f(x)$. Они имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{\frac{1}{2}ns}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} n_1 + \frac{1}{2} s + \frac{1}{4}\right) \ldots$$

$$\ldots \Gamma\left(\frac{1}{2} n_n + \frac{1}{2} s + \frac{1}{4}\right) \psi(s)\, x^{-s}\, ds,$$

где $\psi(s)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\psi(1-s) = \psi(s)$. Далее ядро $\omega_{n_1 n_2 \ldots n_n}(x)$ выражается через гипергеометрические функции, и приводится ряд теорем, относящихся к преобразованию с ядром $\omega_{n_1 n_2}$. В. И. Левин

1577. Об ортонормализации одной специальной системы функций. Кремонези (Sull' ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni. Cremonesi Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci., fis. mat. e natur., 1956, 20, № 2, 168—171 (итал.)

Система N функций

$$e^{-\alpha_m t}, te^{-\alpha_m t}, \ldots, t^{p_m - 1} e^{-\alpha_m t},$$

$m = 1, 2, \ldots, n$, $\Sigma p_m = N$, $\operatorname{Re} \alpha_m > 0$, ортонормализуется методом Э. Шмидта. Рассматриваются преобразования Лапласа функций ортонормализованной системы

$$\Phi(t) = \Phi_{p_1+\cdots+p_{m-1}+\mu}(t) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{p_h} a_{m\mu}^{hk}\, t^{k-1} e^{-\alpha_h t} + \sum_{k=1}^{\mu} a_{m\mu}^{mk}\, t^{k-1} e^{-\alpha_m t},$$

которая, как показывается, должна иметь вид

$$\varphi(s) = \sqrt{2 \operatorname{Re} \alpha_m} \times$$

$$\times \frac{(s-\bar{\alpha}_1)^{p_1}(s-\bar{\alpha}_2)^{p_2}\ldots(s-\bar{\alpha}_{m-1})^{p_{m-1}}(\quad \bar{\alpha}_m)^{\mu-1}}{(s+\alpha_1)^{p_1}(s+\alpha_2)^{p_2}\ldots(s+\alpha_{m-1})^{p_{m-1}}(s+\alpha_m)^{\mu}}.$$

Отсюда определяются коэффициенты $a_{m\mu}^{mk}$ и $a_{m\mu}^{hk}$

В. И. Левин

1578 Д. Тауберовы теоремы для обобщенных преобразований Фурье. Любич Ю. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Харьковск. ун-т, Харьков, 1956.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1579. Момент инерции, центр тяжести и площадь поверхности вращения. Бодунов А. К., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 240—241

В связи с вычислением интегралов, выражающих величины, указанные в заголовке, рассматривается вопрос об аппроксимации радикала

$$\sqrt{1+x^{2m}} \approx \alpha + \beta x^{2m},$$

которая проводится таким образом, чтобы разность $\sqrt{1+v} - \alpha - \beta v$ была функцией, наименее уклоняющейся от нуля. Указывается граница относительной погрешности аппроксимации. А. Г. Школьник

1580. Динамические напряжения при внезапном догружении нижнего конца шахтного каната и полиномы, аналогичные полиномам Лагерра. Денисюк (Динамічні напруги при раптовому довантаженні нижнього кінця шахтного каната і поліноми, аналогічні поліномам Лягерра. Денисюк І. М.). Доповіді АН УРСР, 1956, № 2, 127—129 (укр.; рез. русс.)

Приводятся некоторые дополнительные замечания, относящиеся к результатам предыдущих работ автора из данной области (Тр. Моск. горного ин-та, 1952, 20, 29; РЖМат, 1955, 5908). В. В. Добронравов

См. также: 1416, 1420, 1423, 1436, 1473, 1475, 1476, 1480, 1484, 1485, 1492, 1498, 1736, 1865

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1581. Разделение выпуклых множеств в невекторных линейчатых пространствах. Гика (Separarea mulţimilor convexe în spaţii liniaté nevectoriale. Ghika Al.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 2, 287—296 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть $\mathscr{C}(E)$ есть множество, элементами которого являются некоторые части заданного множества E. Предполагаем, что $\mathscr{C}(E)$ упорядочено путем включения, содержит ϕ, и обозначаем через $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ наименьшее (если оно существует) множество из $\mathscr{C}(E)$, содержащее множества $A_1, \ldots, A_n$. Будем называть E линейчатым пространством, а множества из $\mathscr{C}(E)$ выпуклыми множествами пространства E, если выполнены следующие аксиомы:

(L_I) $x \in E$ влечет $\{x\} \in \mathscr{C}(E)$;

(L_{II}) $x, y \in E$ влечет существование множества $\{x\} \vee \{y\}$ (обозначаемого дальше через $x \vee y$);

(L_{III}) Если для данного $X \subseteq E$ из $x, y \in X$ следует $x \vee y \subseteq X$, то $X \in \mathscr{C}(E)$;

(L_{IV}) $X \in \mathscr{C}(E)$, $x, y \in X$ влечет $x \vee y \subseteq X$;

(L_V) Если $(x \vee y) \cap (x' \vee y')$ содержит две различные точки, то существуют такие $u, v \in E$, что $(x \vee y) \vee (x' \vee y') \subseteq u \wedge v$;

(L_{VI}) $z \in x \vee y$ влечет $(x \vee z) \cap (z \vee y) = \{z\}$;

(L_{VII}) $y' \in x \vee y$, $z' \in x \vee z$ влечет $(y' \vee z) \cap (y \vee z') \neq \phi$,

(L_{VIII}) $(x \vee y) \vee (x' \vee y') = \bigcup_{z \in x \vee y,\ z' \in x' \vee y'} z \vee z'$.

Множества $x \vee y$ называются сегментами. Соединение всех сегментов, содержащих один сегмент $a \vee b$ ($a \neq b$), называется линией.

Любая часть A множества E, содержащая вместе с каждой парой точек также и линию, проходящую через эти точки, называется линейчатым множеством.

Теорема 1. Пусть $\{A_t\}_{t \in I}$ есть семейство выпуклых множеств A_t. Тогда наименьшим выпуклым множеством, содержащим $\bigcup_{t \in I} A_t$, является множество

$$\bigcup x_{t_1} \vee x_{t_2} \vee \ldots \vee x_{t_n};\ x_{t_k} \in A_{t_k},\ n \in N$$

(N — множество натуральных чисел).

Линейчатое пространство E называется неограниченным, если выполнена аксиома

(L_{IX}) Для $x, y \in E$ существуют $x', y' \in E$ такие, что $\neq x$, $y' \neq y$ и $x \vee y \subset x' \vee y'$.

Для топологии на неограниченном линейчатом пространстве E вводятся условия:

(I) Если A выпукло, то $\bar{A}$ выпукло;

(II) Если x есть внутренняя точка A, $y \in \bar{A}$ и A выпукло, то все точки $z \in x \vee y$, $z \neq y$ являются внутренними точками A.

Теорема 4. Пусть топология на неограниченном линейчатом пространстве E удовлетворяет условиям (I) и (II). Пусть A и B — не пустые выпуклые множества в E и по крайней мере одно из них имеет внутренние точки. Тогда существуют такие замкнутое линейчатое множество H, разделяющее множества A и B, и непересекающиеся выпуклые множества F и G, что $A \subseteq \bar{F}$, $B \subseteq \bar{G}$, $F \cup G = E$ и $H = \bar{F} \cap \bar{G}$.

З. Л. Лейбензон

1582. Некоторые замечания о банаховых пространствах функций. Люксембург, Заанен (Some remarks on Banach function spaces. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 1, 110—119; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 110—119 (англ.)

Эта статья примыкает к статье Эллиса и Гальперина (РЖМат, 1954, 2245). Вводим обозначения.

Λ есть σ-кольцо подмножеств E множества Δ; $\mu(E)$ — мера на Λ счетноаддитивная, неотрицательная, полная (т. е. если $E_2 \subset E_1 \in \Delta$ и $\mu(E_1) = 0$, то $\mu(E_2) = 0$), σ-конечная (т. е. Δ есть счетное объединение множеств конечной меры) и $\mu(\Delta) > 0$; P есть множество всех μ-измеримых и неотрицательных функций точки $f(x)$ на Δ. Пусть $\rho(f)$ означает функционал на P, удовлетворяющий условиям: (P1) $0 \leqslant \rho(f) \leqslant \infty$, $\rho(f) = 0$ лишь когда $f(x) = 0$ почти всюду, $\rho(f_1 + f_2) \leqslant \rho(f_1) + \rho(f_2)$ и $\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$ при $\alpha \geqslant 0$. Для некоторой функции $f \in P$ имеем $0 < \rho(f) < \infty$. (P 2a) $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$ влечет $\rho(f_1) \leqslant \rho(f_2)$. X означает нормированное линейное пространство всех μ-измеримых комплексных функций точки на Δ с нормой $\|f\|_X = \rho(|f|)$; для $f \in X$ считаем $\|f\|_X < \infty$. Из Δ удаляется максимальное (измеримое) несущественное для X подмножество, после чего для каждого $E \subset \Delta$ положительной меры имеется $F \subset E$ положительной меры с $\rho(\chi_F) < \infty$, где χ_F — характеристическая функция множества F. Доказывается: (P3) Имеется такая последовательность множеств $\Delta_n \uparrow \Delta$, что $\mu(\Delta_n) < \infty$ для всех n и $\|\chi_E\| = \rho(\chi_E) < \infty$ для каждого $E \subset \Delta$, ограниченного относительно последовательности Δ_n (т. е. содержащегося в одном из Δ_n). Ниже предполагаем дополнительно (P2b) $0 \leqslant f_n \uparrow f$ (почти всюду) и $\sup \rho(f_n) < \infty$ влечет $\rho(f) < \infty$. При этом X оказывается пространством Банаха. Доказывается локальная интегрируемость $f \in X$. Именно: (P4) Если $E \subset \Delta$ ограничено (относительно последовательности Δ_n), то имеется константа A_E такая, что для всех f будет $\int_E |f|\,d\mu \leqslant A_E \|f\|_X$.

Положим $\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \int fg\,d\mu$, $\|f\|_{X''} = \sup_{\|g\|_{X'} \leqslant 1} \int fg\,d\mu$, где f и g — комплексные μ-измеримые функции. Доказывается равенство $\|f\|_{X''} = \inf_{f_n \uparrow |f|} (\lim \|f_n\|_X)$. $\|f\|_{X''}$ оказывается нормой в X, равносильной норме $\|f\|_X$. Ниже $\|f\| = \|f\|_{X''}$, и последовательность $\Delta_n \uparrow \Delta$ выбрана так, что $\mu(\Delta_n) < \infty$ и выполняются (P3) и (P4).

По определению, $f \in X$ обладает «абсолютно непрерывной нормой», если: (a) $\|f\chi_{\Delta - \Delta_n}\| \to 0$ при $n \to \infty$; (b) $\|f\chi_E\| \to 0$ при $\mu(E) \to 0$. При изменении выбора последовательности Δ_n условие (a) сохраняется. Через X^χ обозначим совокупность всех f с абсолютно непрерывной нормой; через X^b обозначим замыкание по норме X множества всех функций $f(x)$, μ-измеримых, ограниченных и обращающихся в нуль вне некоторого Δ_n (n зависит от f). X^χ и X^b являются замкнутыми линейными подпространствами X. Доказывается, что $X^\chi = \bigcap X^b$, где пересечение берется по всевозможным выборам последовательностей Δ_n. Приводятся простые примеры, когда X^χ, X^b, X попарно различны. Дается простая характеристика X^b и приводится условие, при котором X^χ совпадает с одним из X^b. Д. П. Мильман

1583. Об одной минимум-задаче в пространстве непрерывных функций. Зуховицкий С. И., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 3, 383—384

Пусть G — подпространство пространства $C(a, b)$ непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, и φ — линейный функционал на G. Распространение f функционала φ на все $C(a, b)$ называется минимальным, если $\|f\| = \|\varphi\|$. При условии, что в G существует элемент, реализующий равенство $\|\varphi\| = \sup |\varphi(x)|$ ($x \in G$, $\|x\| \leqslant 1$), дается описание структуры функции ограниченной вариации, определяющей произвольное минимальное расширение функционала φ. Указываются условия, при которых для данного функционала

$$f(x) = \int_a^d x(t)\,dg(t) \quad (x \in C(a, b))$$

существует такой элемент $x_0 \in C(a, b)$, что $f(x_0) = \|f\|$ ($\|x_0\| = 1$). Г. П. Акилов

1584. Общая теорема умножения характеристических матриц - функций линейных операторов и некоторые ее приложения. Бродский М. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 114

1585. О линейных метрических пространствах. V. Соотношения между различными метриками. Неванлинна (Uber metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken. Nevanlinna Rolf), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A-I, № 222, 6 S. (нем.)

Пятая из серии статей автора о линейных множествах с несобственной метрикой, определяемой при помощи билинейной формы Q (РЖМат, 1955, 4534; там же см. обозначения). В реферируемой статье при определенных условиях, накладываемых на исходную форму Q и мажорантную форму H, рассматривается минимальная мажорантная форма P и указываются некоторые ее характеристики. Г. П. Акилов

1586. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Себаштьяни-Силва (Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Sebastião e Silva Jose), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 388—410 (итал.)

Рассматриваются два класса локально выпуклых пространств, охватывающие большинство применяемых сейчас в анализе пространств аналитических, бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций: пространства (M^*), представимые в виде проективного предела нормированных пространств S_n относительно вполне непрерывных линейных отображений $S_{n+m} \to S_n$, и пространства (LN^*), представимые в виде индуктивного предела возрастающей последовательности нормированных пространств S_n с вполне непрерывными вложениями $S_n \to S_{n+1}$. Пусть S — пространство (LN^*). Множество $H \subset S$ замкнуто тогда (и только тогда), когда $H \cap S_n$ замкнуто в S_n для каждого n; H ограничено в S (тогда и) только тогда, когда H содержится и ограничено в некотором S_p; далее, $x_n \to 0$ в S (тогда и) только тогда, когда все $x_n \in S_p$ и $x_n \to 0$ в S_p для некоторого p. Пространства (M^*) и (LN^*) — рефлексивные (M)-пространства. Сильное сопряженное к пространству (LN^*) есть пространство (M^*) и обратно. Бесконечномерное пространство (LN^*) не метризуемо. Пространства (M^*) и (LN^*) полны. В заключение рассматриваются локально выпуклые пространства, топология которых определяется сходящимися последовательностями, в частности, «пространства $(\bar{L}_c)$», характеризуемые тем, что всякое сохраняющее сходимость последовательностей линейное отображение этих пространств в произвольное локально выпуклое пространство непрерывно. Устанавливается, что этим свойством обладает, в частности, пространство распределений Шварца на R^n.

Примечание референта. Выделенные в реферируемой работе классы пространств в действительности шире, чем непосредственно видно из их определений. Так, индуктивный предел возрастающей последо-

вательности любых локально выпуклых пространств S_n с вполне непрерывными вложениями $S_n \to S_{n+1}$ есть пространство (LN^*); каждое ограниченно замкнутое локально выпуклое пространство («espace bornologique» Бурбаки) есть пространство $(\overline{L}_c)$. Д. А. Райков

1587. **В связи с заметкой автора «О продолжении непрерывных линейных функционалов в топологических векторных пространствах».** **Маринеску** (În legătură cu nota autoru lui «Asupra prelungirii funcţionalelor lin are continue în spaţiile vectoriale topologice». Marinescu G.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 3, 543—544 (рум.; рез. русс., франц.)

Указывается, что в теореме 5 заметки автора (РЖМат, 1955, 867) необходимо предполагать непрерывность функционала p. З. Л. Лейбензон

1588. **Индуктивный предел и бесконечное прямое произведение операторных алгебр.** **Такэда** (Inductive limit and infinite direct product of operator algebras. Takeda Zirô), Tôhoky Math. J., 1955, 7, № 1—2, 67—86 (англ.)

C^*-индуктивным пределом направленного по возрастанию множества C^*-алгебр A_γ (обозначения и понятия см. в работе РЖМат, 1956, 5352) с единицами 1_γ автор называет C^*-алгебру A (если она существует) с единицей 1, для которой существуют такие изоморфные отображения f_γ алгебр A_γ в A, что $f_\gamma(1_\gamma) = 1$ и $f_\alpha(A_\alpha) \subset f_\beta(A_\beta)$, если $\alpha < \beta$. C^*-индуктивный предел C^*-алгебр A_γ существует, если для каждой пары индексов α, β, $\alpha < \beta$, существует изоморфное отображение $f_{\beta\alpha}$ алгебры A_α в A_β, переводящее 1_α в 1_β и такое, что $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} f_{\beta\alpha}$, когда $\alpha < \beta < \gamma$. Устанавливается, что если C^*- алгебра A есть C^*-индуктивный предел алгебр A_γ, то пространство состояний Ω алгебры A (РЖМат, 1956, 5352) гомеоморфно проективному пределу пространств состояний Ω_γ алгебр A_γ. На основе понятия индуктивного предела определяется также бесконечное прямое произведение C^*-алгебр. W^*-алгебра A называется W^*-индуктивным пределом W^*-алгебр A_γ, если множество нормальных состояний на A совпадает с проективным пределом нормальных состояний на A_γ. Алгебра A этим условием определяется однозначно. С другой стороны, рассматривается также W^*-прямой предел W^*-алгебр на гильбертовом пространстве H, определение которого аналогично определению C^*-индуктивного предела C^*-алгебр. W^*-прямой предел алгебр A_γ зависит от пространства H; он является всегда нормально гомоморфным образом W^*-индуктивного предела алгебр A_γ. Определяется бесконечное прямое произведение W^*-алгебр A_γ, не зависящее от задания соответствующих пространств H_γ. Устанавливается, что прямое произведение алгебр B_i всех ограниченных операторов в гильбертовых пространствах H_i в смысле Нёймана (Neumann J. von, Compositio math., 1938, 6, 1—77) является нормально гомоморфным образом прямого произведения этих алгебр в смысле автора. М. И. Граев

1589. **Тонкая структура и непрерывность спектров в банаховых алгебрах.** **Лумер** (Fine structure and continuity of spectra in Banach algebras. Lumer G.), Anais Acad. brasileira cienc., 1954, 26, № 2, 229—233 (англ.)

В полном нормированном кольце R с единицей e рассматриваются множества:

$S_+ = \{x : x$ не имеет правого обратного$\}$, $S_- = \{x : x$ не имеет левого обратного$\}$, $D_+ = \{x : \exists y_n, \|y_n\| = 1, y_n x \to 0\}$, $D_- = \{x : \exists y_n, \|y_n\| = 1, x y_n \to 0\}$, $D_{0+} = \{x : \exists y \neq 0, yx = 0\}$, $D_{0-} = \{x : \exists y \neq 0, xy = 0\}$, $D = D_+ \cup D_-$, $C_+ = S \cup D'_+$, $C_- = S \cap D'_-$, $C = C_+ \cup C_-$, а также множества $K(x) = (x + K) \cap \{\lambda e\}$, где $x \in R$, а K—одно из введенных выше множеств $S_+, \ldots, C$. Множества $K(x)$ являются частями спектра $S(x)$ элемента x. Формулируются предложения о соотношениях между этими множествами. Кроме того, приводятся некоторые достаточные условия непрерывности отображения $S(x)$ кольца R в метрическое (с метрикой Хаусдорфа) пространство X компактных множеств $S \subset \{\lambda e\}$. В заключение рассматриваются случаи кольца всех ограниченных линейных операторов в банаховом или гильбертовом пространстве, а также случай кольца без единицы. Доказательства не приводятся. М. А. Наймарк

1590. **Обобщенное преобразование Уолша.** **Селфридж** (Generalized Walsh transform. Selfridge R. G.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 451—480 (англ.)

Рассматривается преобразование Уолша-Фурье, основанное на обобщенных функциях Уолша, индекс которых пробегает континуум. Бо́льшая часть результатов автора является частным случаем результатов, полученных референтом (Матем. сб., 1952, 30, 233—244). Этот частный случай получается, если в качестве группы G взять прямую сумму топологической прямой суммы счетного множества циклических групп порядка 2 и алгебраической прямой суммы счетного множества таких же групп. Новыми являются результаты, касающиеся суммирования интегралов Уолша-Фурье: показано, что для $(C, 1)$-суммируемости преобразования Уолша-Фурье функции $f(x)$ в точке Лебега достаточно ограниченности (за исключением множества меры нуль) функции $f(x)$ в окрестности этой точки. Некоторые результаты автора (например, теорема 8) непосредственно вытекают из теории преобразования Фурье на абелевых группах. Н. Я. Виленкин

1591. **О дискретности невещественной части спектра несамосопряженного оператора.** **Халилов З. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 122

1592. **Обобщение теории Рисса вполне непрерывных отображений.** **Грейвс** (A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations. Graves Lawrence M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 141—149 (англ.)

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — бесконечномерные комплексные банаховы пространства. Рассматриваются операторы $T_\lambda = E - \lambda K$, отображающие пространство $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, где E — линейный непрерывный оператор, отображающий $\mathfrak{X}$ на все пространство $\mathfrak{Y}$, K — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, а λ — комплексный параметр. Доказывается, что, исключая счетное множество значений λ, называемых собственными значениями, имеет место $T_\lambda \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Строится теория собственных значений оператора T_λ, обобщающая теорию Рисса оператора $I - \lambda K$, где I — тождественный оператор, а K — вполне непрерывный оператор отображающий пространство $\mathfrak{X}$ в себя. Показывается, что собственные значения λ оператора T_λ не имеют конечной предельной точки и что, если положить для собственного значения λ $\mathfrak{W}_1 = T_\lambda \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{W}_\nu = T_\lambda E^{-1} \mathfrak{W}_{\nu-1}$, $\nu = 2, 3, \ldots$, то существует ν_0, для которого $\mathfrak{W}_{\nu_0} = \mathfrak{W}_{\nu_0+1}$. Дается определение «порядка» собственного значения λ и изучаются некоторые его свойства. Л. Д. Кудрявцев

1593. **О вполне непрерывных эндоморфизмах.** **Фукухара, Сибуя** (Sur l'endomorphisme complètement continu. Hukuhara Masuo, Sibuya

Yasutaka), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 9, 595—599 (франц.)

(*L*)- пространством автор называет множество R, в котором топология определяется при помощи системы последовательностей $\{\Sigma(x);\ x \in R\}$, удовлетворяющей условиям: 1) последовательность $\{x_n\}$, для которой $x_n = x$, принадлежит $\Sigma(x)$; 2) всякая подпоследовательность последовательности из $\Sigma(x)$ принадлежит $\Sigma(x)$; 3) $\Sigma(x) \cap \Sigma(y) = 0$, если $x \neq y$. Точка $a \in R$ называется точкой прикосновения множества E, если из E можно выделить последовательность, принадлежащую $\Sigma(a)$. Точка a — внутренняя для E, если a не есть точка прикосновения множества, дополнительного к E. Окрестностью точки a называется всякое множество внутренних точек, содержащее a. Далее $a_n \to a$, если всякая окрестность точки a содержит почти все точки a_n.

Предполагается также, что R — линейное пространство, в котором алгебраические операции связаны с топологией соотношениями: 4) если $\{x_n\} \in \Sigma(x)$, $\{y_n\} \in \Sigma(y)$, то $\{x_n + y_n\} \in \Sigma(x+y)$; 5) если $\{x_n\} \in \Sigma(x)$ и $\alpha_n \to \alpha$, то $\{\alpha_n x_n\} \in \Sigma(\alpha x)$.

Линейный оператор K, отображающий R в некоторое линейное (*L*)- пространство R', называется непрерывным, если $Lx_n \to 0'$ ($0'$ — нулевой элемент пространства R') для всякой последовательности $\{x_n\} \in \Sigma(0)$. Оператор K называют вполне непрерывным, если он непрерывен и существует такая окрестность, образ которой компактен.

На основании некоторых ранних результатов Фукухара (РЖМат, 1956, 2019) доказывается справедливость основных положений теории Рисса — Шаудера для вполне непрерывных линейных операторов в линейных (*L*)- пространствах.

Если, в частности, R — линейное топологическое пространство, то в качестве $\Sigma(x)$ рассматриваются все последовательности, сходящиеся к $x \in R$, и всякий линейный оператор, вполне непрерывный в R, оказывается таким же и в смысле топологии, определяемой вышеуказанной системой последовательностей $\{\Sigma(x);\ x \in R\}$. Отсюда следует справедливость основных положений теории Рисса — Шаудера для линейных топологических пространств, доказанная ранее Вильямсоном (РЖМат, 1955, 5937). Д. Ф. Харазов

1594. О линейных уравнениях с вполне непрерывными операторами, полиномиально зависящими от параметра. Харазов Д. Ф. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 122

1595. Неподвижные точки преобразований с некомпактной областью значений. Дарбо (Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. Darbo Gabriele), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, **24**, 84—92 (итал.)

Пусть X — ограниченное подмножество метрического пространства и $\alpha(X)$ — точная нижняя граница всех чисел ε таких, что X является конечной суммой множеств, диаметры которых меньше ε. Рассматривается один класс преобразований пространства Банаха в себя, охватывающий вполне непрерывные и сжатые отображения. Это такие преобразования ξ, которые переводят ограниченные множества в ограниченные, причем существует число $0 \leqslant k_\xi < 1$ (не зависящее от X) такое, что $\alpha(\xi(X)) < k_\xi \alpha(X)$, при всяком ограниченном X. Их автор называет α-сжатыми преобразованиями.

Основной результат: Пусть ξ является α-сжатым преобразованием выпуклого замкнутого множества X пространства Банаха, причем $\xi(X)$ ограничено и $\xi(X) \subset X$. Тогда ξ обладает неподвижной точкой.

Доказательство сводится к теореме Шаудера о неподвижной точке при помощи теоремы Куратовского (Fundam. math., 1930, **15**, 303) и следующей леммы автора:

Если X^* — замкнутая выпуклая оболочка ограниченного множества X пространства Банаха, то $\alpha(X^*) = \alpha(X)$. M. Altman

1596. Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 2, 55—76

Первые два параграфа содержат основные понятия и некоторые общие предложения о пространствах Орлича (РЖМат, 1955, 4536, где указана библиография). §§ 3 и 4 содержат предложения о непрерывности и полной непрерывности оператора

$$Au(x) = \int_G K(x, y)\, u(y)\, dy$$

из пространства Орлича L^*_M в другое такое пространство (G — ограниченное множество n-мерного евклидова пространства). Пусть $N_1(v)$, $N_2(v)$, $N_3(v)$ — дополнительные функции к соответствующим N'-функциям $M_1(u)$, $M_2(u)$, $M_3(u)$. Тогда A — непрерывный оператор из $L^*_{M_2}$ в $L^*_{M_1}$, если выполнено одно из условий α_1), α_2) или α_3):

α_1) Для всяких $u(x) \in L^*_{M_1}$ и $v(y) \in L^*_{N_2}$ $\|u(x)\, v(y)\|_{M_3} \leqslant l \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2}$ или $u(x)\, v(y) \in L^*_{M_3}(G \times G)$ и $K(x, y) \in L^*_{N_3}(G \times G)$, где $l = \text{const}$.

α_2) $K(x, y) \in L^*_{N_3}(G \times G)$, где $N_3(v) = M_3[N_1(v)]$ или $N_3(v) = N_1[M_2(v)]$.

α_3) $K(x, y) \in L^*_{N_3}(G \times G)$, $M_3(u)$ удовлетворяет Δ'-условию (т. е. $M(uv) \leqslant CM(u)\, M(v)$ при $u, v \geqslant u_0 > 0$, C — положительное число), $L^*_{M_1} \subseteq L^*_{M_3}$ и $L^*_{N_2} \subseteq L^*_{M_3}$. Далее доказывается, что если выполнено α_2) или α_3) и $K(x, y)$ принадлежит не только $L^*_{N_3}(G \times G)$, но и подпространству E_{N_3}, являющемуся замыканием в $L^*_{N_3}(G \times G)$ множества ограниченных функций, то A — вполне непрерывный оператор из $L^*_{M_1}$ в $L^*_{M_3}$. Условия последнего предложения, в частности, выполняются, если N'-функция $N_3(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию или если $\int_G \int_G N_3[\beta K(x, y)]\, dx\, dy < \infty$ для любого $\beta > 0$, или если

$$\int_G \int_G N_3\{M[K(x, y)]\}\, dx\, dy < \infty,$$

где M — некоторая N'-функция.

Дано уточнение одной теоремы Занена (Zaanen A. C., Ann. Math, 1946, **47**, № 4, 654—666) о полной непрерывности оператора A. М. М. Вайнберг

1597. О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева. Зуховицкий С. И., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 125—159

В реферируемой статье, носящей обзорный характер, содержится изложение основ классической теории чебышевского приближения в связи с некоторой минимум-задачей абстрактной теории моментов. Последняя формулируется (в гл. 1) следующим образом. В линейном нормированном пространстве E задано n линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$. Требуется определить на E линейный функционал $f(x)$ с минимальной нормой, удовлетворяющий условиям: $f(x_i) = c_i$,

$i = 1, \ldots, n$, где c_i — наперед заданные числа, $\Sigma_1^n c_i^2 > 0$.

Такой функционал всегда существует и $\|f\| = [\min \|\Sigma_1^n \xi_i V_i\|]$, где минимум берется при условии $\Sigma_1^n C_i \xi_i = 1$ (теорема 1).

Устанавливается специальный вид таких функционалов в конечномерном пространстве E_n и в пространстве $C(Q)$ функций, непрерывных на компакте Q.

Если $\varphi_i(q) \in C(Q)$, $i = 1, \ldots, n$ — линейно независимые функции, $\Phi(q) \in C(Q)$, то, как вытекает из теоремы 1,

$$\min_{\xi_1, \ldots, \xi_n} \|\sum_1^n \xi_i \varphi_i(q) - \Phi(q)\| = \left[\min_{f(\varphi_i)=0,\ f(\Phi)=-1} \|f\|\right]$$

и, таким образом, результаты гл. 1 оказывается возможным применить к решению проблем наилучшего приближения функций полиномами. Этому посвящена гл. 2, где изложены обобщения теорем Хара, П. Л. Чебышева, Валле-Пуссена. Кроме своих работ, автор использует результаты М. Г. Крейна, Е. Я. Ремеза и др. Библ. 24 назв. В. Н. Никольский

1598. О группах унитарных операторов в пространстве Гильберта. Рабинович В. С., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 37, 125—130

Пусть G — абстрактная группа унитарных операторов U гильбертова пространства H, из любой последовательности которых может быть выделена подпоследовательность, сильно сходящаяся к некоторому оператору U_0. Тогда в G можно ввести топологизацию, превращающую группу G в компактную топологическую группу со второй аксиомой счетности.

Дается обобщение теоремы А. А. Гуревич (Матем. сб., 1943, **13**, № 1, 79—86) на унитарные представления компактных групп, непрерывные в следующем смысле: если $\lim x = x^0$, то $\lim Ux\varphi = Ux^0\varphi$ для любого элемента $\varphi \in H$ и любого линейного функционала F на H. Н. Я. Виленкин

1599. О представлениях операторных алгебр. II. Такэда (On the representations of operator algebras. II. Takeda Zirô), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 212—219 (англ.)

Выясняется связь между различными W^*-алгебрами, порожденными C^*-представлениями данной B^*-алгебры A в различных гильбертовых пространствах (понятия и обозначения предыдущей статьи автора, РЖМат, 1956, 5352). Пусть $S(A^{\#}, H)$ обозначает множество всех функционалов $\rho(x)$ в A, представимых в виде $\rho(x) = \Sigma_{i=1}^{\infty}(x^{\#}\varphi_i, \varphi_i)$, где $x^{\#}$ означает оператор представления $A^{\#}$, соответствующий элементу $x \in A$, а φ_i — элементы гильбертова пространства H, на котором строится представление, удовлетворяющее условию $\Sigma_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|^2 = 1$. Устанавливаются следующие результаты. Пусть $\{A^{\#_1}, H_1\}$ и $\{A^{\#_2}, H_2\}$ — два C^*-представления B^*-алгебры A соответственно в гильбертовых пространствах H_1 и H_2; M_1 и M_2 — слабые замыкания этих представлений. Тогда 1) M_1 алгебраически $*$-изоморфно M_2 тогда и только тогда, когда $S(A^{\#_1}, H_1) = S(A^{\#_2}, H_2)$; 2) если $S(A^{\#_1}, H_1) \supset S(A^{\#_2}, H_2)$, то существует нормальный гомоморфизм M_1 на M_2. На основании этих результатов дается также другое доказательство теоремы Мисоноу (РЖМат, 1956, 6700) о свойствах прямого произведения двух операторных алгебр. М. И. Граев

1600. Среднее значение и интеграл от функционала. Полищук Е. М., Укр. матем. ж., 1956, 8, №1, 59—75

См. РЖМат, 1956, 6694, 6695.

1601. О компактности систем непрерывных функционалов. Кованько А. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 114

1602. Об условном экстремуме и соответствующем функциональном уравнении в гильбертовом пространстве. Цитланадзе Э. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 122

1603. Заметка об интерполировании сублинейных операций. Кальдерон, Зигмунд (A note on the interpolation of sublinear operations. Calderon A. P., Zygmund A.), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 282—288 (англ.)

Пусть в некотором пространстве R задана мера, т. е. неотрицательная счетноаддитивная функция $\mu(E)$, определенная на некоторых подмножествах E пространства R. Для всякой измеримой относительно μ функции f полагаем

$$\left(\int_R |f|^r d\mu\right)^{1/r} = \|f\|_{r,\mu} \quad (0 < r < \infty)$$

и через $\|f\|_{\infty,\mu}$ обозначаем существенную верхнюю грань для $|f|$. Множество функций f, для которых $\|f\|_{r,\mu}$ конечна, обозначается $L^{r,\mu}$ $(0 < r \leqslant \infty)$.

Пусть R_1 и R_2 — два пространства с мерами соответственно μ и ν и $h = Tf$ — преобразование функций $f = f(u)$, определенных (почти всюду) в R_1, в функции $h = h(v)$, определенные в R_2.

Пусть $r > 0$, $s > 0$. Линейная (т. е. аддитивная и однородная) операция $h = Tf$ называется операцией типа (r, s), если она определена для всякой $f \in L^{r,\mu}$ и если $\|Tf\|_{s,\nu} \leqslant M\|f\|_{r,\mu}$, где M не зависит от f. Наименьшее значение M называется (r, s)-нормой операции.

Пусть (α, β) — точка квадрата Q: $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. Теорема М. Риса об интерполяции в форме, обобщенной Торином (Thorin G. O., Convexity theorems, Uppsala, 1948), утверждает, что если линейная операция $h = Tf$ есть одновременно операция типа $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ и $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ с нормами соответственно M_1 и M_2 и если $\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$, $\beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2$ $(0 < t < 1)$, то T есть также операция типа $(1/\alpha, 1/\beta)$ с нормой $M \leqslant M_1^{1-t} M_2^t$.

Авторы переносят эту теорему на сублинейные операции.

Операция $h = Tf$ называется сублинейной, если удовлетворены следующие условия: 1) Tf определена (однозначно), если $f = f_1 + f_2$ и определены Tf_1 и Tf_2; 2) для каждого постоянного k, $T(kf)$ определена, если Tf определена; 3) имеем $|T(f_1 + f_2)| \leqslant |Tf_1| + |Tf_2|$, $|T(kf)| = |k||Tf|$ для каждого постоянного k. Н. К. Бари

1604. Представление полных векторных структур посредством полных функциональных векторных структур. Тома (Darstellung von vollständigen Vektorverbänden durch vollständige Funktionenvektorverbände. Thoma Elmar), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 11—22 (нем.)

Векторную структуру F_M, образованную действительными функциями, заданными на некотором множестве M (с обычными определениями алгебраических операций и частичной упорядоченности), автор называет полной функциональной векторной структурой, если из $f_i \in F_M$, $h \in F_M$ и $f_i \leqslant h$ $(i \in I)$ следует, что $\sup_i \{f_i(x)\} \in F_M$. Очевидно, что F_M есть полная векторная структура, в которой грани вычисляются «по точкам». Доказывается, что полная векторная структура изоморфна полной функциональной векторной структуре тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна.

Основной результат исследования состоит в том, что всякая полная векторная структура единственным образом разлагается на две дизъюнктные компоненты, из которых одна изоморфна некоторой полной функциональной структуре, а другая не гомоморфна какой бы то ни было (не тривиальной) полной функциональной векторной структуре.

Примечание референта. Автору по-видимому, неизвестно предложение референта о разложении произвольного K-пространства на дискретную и непрерывную компоненты (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М. — Л., Гостехиздат. 1950, гл. 3, § 5). А. Г. Пинскер

1605. Преобразования Рейнольдса, действующие на множестве неотрицательных измеримых функций. Кампе-де-Ферье (Transformations de Reynolds opérant dans un ensemble de fonctions mesurables non négatives. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 14, 787—789 (франц.)

Преобразования Рейнольдса представляют собой математическую формализацию операции осреднения, употребляемой в теории турбулентности. Преобразование Рейнольдса определяется как оператор, проектирующий множество положительных измеримых функций на некоторое его подмножество, причем удовлетворяются соответствующие аксиомы. Указывается, что достаточно определить преобразование для характеристических функций измеримых множеств. Даются необходимые и достаточные условия того, чтобы оператор, определенный для характеристических функций измеримых множеств, распространялся в виде преобразования Рейнольдса на все измеримые функции. Приводятся простейшие примеры. Л. А. Дикий

1606. Общие свойства преобразований Рейнольдса. Дюбрей-Жакотен (Propriétés générales des transformations de Reynolds. Dubreil-Jacotin Marie-Louise), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 856—858 (франц.)

Преобразования Рейнольдса определены, например в работе Кампе-де-Ферье (реф. 1605). Если C_A — характеристическая функция множества A, то множество A называется T-идемпотентным, если $TC_A = C_A$; оно называется T-аннулируемым, если $TC_A = 0$. Доказывается, что если $TC_A = C_A TC_A$, то множество A есть сумма T-идемпотентного и T-аннулируемого множества (такие множества называются квази T-идемпотентными). Доказывается еще ряд аналогичных теорем. Вводится понятие регулярных преобразований Рейнольдса. Приводится пример регулярного преобразования. Л. А. Дикий

1607. Конструкция регулярных преобразований Рейнольдса. Кампе-де-Ферье (Construction des transformations de Reynolds régulières. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 16, 934—936 (франц.)

Преобразование Рейнольдса (реф. 1605) называется, согласно Дюбрей-Жакотен (реф. 1606), регулярным, если пересечение любых T-идемпотентных множеств есть снова T-идемпотентное множество. В реферируемой работе дается способ конструирования регулярных преобразований. Л. А. Дикий

1608. Новые свойства преобразований Рейнольдса. Арбо (Nouvelles propriétés des transformations de Reynolds. Arbault Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 858—860 (франц.)

О квазирегулярных преобразованиях Рейнольдса. Арбо (Sur les transformations de Reynolds quasi régulières. Arbault Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 16, 949—951 (франц.)

Содержится некоторое дальнейшее развитие понятий введенных в работах Кампе-де-Ферье и других авторов, (реф. 1605, 1606, 1607). Л. А. Дикий

1609. О некоторых алгебрах мер. Эдуардс (On certain algebras of measures. Edwards R. E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 379—389 (англ.)

Изучаются связи между векторным пространством E функций на локально компактной группе G и векторным пространством F мер Радона на G. Предполагается, что 1) каждая функция $f \in E$ интегрируема относительно любой меры $\mu \in F$; 2) пространство F инвариантно относительно свертки; 3) если $f \in E$, $\mu \in F$ и $g(x) = \int_G f(xy)\, d\mu(y)$, то $g \in E$; 4) для $f_1 \neq f_2 \in E$ найдется такая мера $\mu \in F$, что $(f_1, \mu) \neq (f_2, \mu)$; $(f, \mu) = \int f(x)\, d\mu(x)$. В F вводится слабая топология, связанная с билинейной формой (f, μ). Для непрерывности отображения $(\mu, \nu) \to \mu * \nu$ в этой топологии необходимо и достаточно, чтобы каждая функция f из E была конечной линейной комбинацией матричных элементов конечномерных линейных представлений группы G (эти элементы принадлежат E).

Далее рассматривается строение идеалов в алгебре F при условии, что E состоит из медленно растущих функций, а F — из быстро убывающих мер на прямой линии. Н. Я. Виленкин

1610. Теорема Хаусдорфа — Бернштейна — Уиддера для полугрупп в локально компактных абелевых группах. Нуссбаум (The Hausdorff — Bernstein — Widder theorem for semi-groups in locally compact Abelian groups. Nussbaum A. E.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 4, 573—582 (англ.)

Полугруппа S называется полной, если а) S может быть вложена в локально компактную абелеву группу G, б) S измерима по отношению к мере Хара на G и в) каждое непустое подмножество S имеет ненулевую меру.

Через $\chi(x)$ обозначается вещественный характер топологической полугруппы S, т. е. непрерывный гомоморфизм S в мультипликативную полугруппу действительных чисел. Пусть S^* — двойственная к S полугруппа всех вещественных характеров на S со слабой топологией, по отношению к которой непрерывны все функции $x : \chi \to \chi(x)$; S^0 — совокупность всех $\chi(x) \in S^*$, для которых $0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1$.

Непрерывная вещественная функция $f(x)$ на полной полугруппе S, содержащей 0, называется вполне монотонной, если

$$(I - T_{\delta_1})^{n_1} (I - T_{\delta_2})^{n_2} \ldots (I - T_{\delta_m})^{n_m} f(x) \geqslant 0$$

для всех целых неотрицательных $n_1, n_2, \ldots, n_m$, всех целых $m \geqslant 1$, всех $\delta_i \in S$ $(i = 1, \ldots, m)$ и всех $x \in S$. Через T_δ обозначен оператор сдвига: $T_\delta f(x) = f(x + \delta)$.

Основной результат: Непрерывная вещественная функция $f(x)$ на полной полугруппе S, содержащей 0, вполне монотонна тогда и только тогда, когда она допускает представление в виде обобщенного интеграла Лапласа — Стилтьеса

$$f(x) = \int_{S^0} \chi(x)\, d\alpha(\chi),$$

где $d\alpha(\chi)$ — неотрицательная конечная мера на S^0. И. С. Иохвидов

1611. Определение дистрибуции. Микусинский Я., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 11, 587—589

Определение обобщенной функции. Микусинский (Une définition de distribution. Mikusiński J.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, **3**, № 11, 589—591 (франц.)

Совокупность дистрибуций (обобщенных функций) определяется как замыкание пространства непрерывных функций по некоторой специальной сходимости. Точнее говоря, последовательность $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ непрерывных функций $(-\infty < x < \infty)$ называется фундаментальной, если существуют такая локально равномерно сходящаяся последовательность $F_n(x)$ и такое целое $k = k_f \geqslant 0$, что $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Две фундаментальные последовательности $f_n(x)$ и $g_n(x)$ называются равносильными, если $k_f = k_g$ и соответствующие последовательности $F_n(x)$ и $G_n(x)$ сходятся к одному и тому же пределу. Дистрибуция определяется как класс равносильных фундаментальных последовательностей.

Класс объектов, выделяемых приведенным определением, совпадает с классом функционалов С. Л. Соболева (Матем. сб., 1936, 1, 39—71) и с классом распределений Шварца конечного порядка (Schwartz L., Théorie des distributions, I, Paris, 1950). Г. Е. Шилов

1612. Новые типы пространств основных и обобщенных функций и классы единственности обобщенной задачи Коши. Гуревич Б. Л., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, М., АН СССР, 1956, 114

1613. Об операторе, используемом в уравнении Баба. Прието (Sobre un operador util en la ecuacion de Bhabha. Prieto C. Fernando E.), Rev. mexicana fis., 1954, 3, № 1, 24—42 (исп.; рез. англ.)

Рассматриваются некоторые свойства решений уравнения Баба для частицы, которая может находиться в двух массовых состояниях с полжительной плотностью заряда. Эти решения реализуют представление

$$R = R(^3/_2,\ ^1/_2) + R(^1/_2,\ ^1/_2) + R(^1/_2,\ ^1/_2)$$

группы Лоренца и являются 20-компонентными. Получено явное выражение для оператора $p^2(p-k)$ $(p^2 - a^2_j m_i^2)$, к которому сводятся суммы по спиновым состояниям, возникающие при вычислении вероятностей переходов. Д. В. Ширков

1614 К. Линейные дифференциальные операторы. Наймарк М. А. М., Гостехиздат, 1954, 352 стр., 15 р. 75 к.

Дается весьма полное изложение спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка, причем излжены все основные результаты теории, полученные до 1952 г. Широко используются идеи и методы функционального анализа, в основном связанные с теорией линейных операторов в гильбертовом пространстве. Необходимые сведения из функционального анализа приводятся в самой книге.

Книга состоит из двух частей. В первой части излагается теория дифференциальных операторов в конечном интервале (включая теорию несамосопряженных операторов), причем здесь применение методов функционального анализа сведено к минимуму. Вторая часть книги посвящена изложению теории дифференциальных операторов как операторов в гильбертовом пространстве.

В гл. I излагаются основные понятия. Приводятся простейшие свойства собственных функций и собственных значений сопряженных дифференциальных операторов (при сопряженных граничных условиях). Строится функция Грина для любой граничной задачи (в случае ее разрешимости, и притом единственной). Выясняется аналитическая природа функции Грина оператора $L - \lambda I$.

В гл. II выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций в случае граничных условий, заданных на конечном интервале. Дается разложение по собственным функциям и собственным значениям в случае оператора, порожденного регулярными краевыми условиями. Приводится доказательство теоремы М. В. Келдыша о разложении по собственным функциям в случае распадающихся краевых условий.

В гл. III предыдущие результаты обобщаются на случай систем дифференциальных уравнений.

В гл. IV, с которой начинается вторая часть книги, приводятся некоторые сведения из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Основное внимание уделяется вопросам спектрального анализа самосопряженных операторов, индексам дефекта оператора и теории расширения операторов.

Гл. V посвящена теории симметрических дифференциальных операторов. Изложение ведется для так называемых обобщенных операторов (т. е. таких, коэффициенты которых — не обязательно достаточно гладкие функции). Изучается оператор L_0, т. е. дифференциальный оператор на минимальной области определения, исследуются его индексы дефекта в регулярном и сингулярном случаях. Далее приводится общий вид самосопряженных расширений оператора L_0, исследуются их резольвенты, доказываются общие теоремы о спектре этих расширений.

В гл. VI излагается спектральный анализ дифференциальных операторов в общем случае. Вывод теоремы о разложении по собственным функциям проводится с помощью метода направляющих функционалов, данного М. Г. Крейном.

Гл. VII посвящена исследованию индекса дефекта и спектра дифференциальных операторов в зависимости от поведения их коэффициентов. Сначала доказываются теоремы об асимптотике решений систем дифференциальных уравнений 1-го порядка и одного уравнения высшего порядка. Далее доказываются разные теоремы об индексе дефекта оператора L_0 в зависимости от свойств его коэффициентов. Изучается вопрос о характере спектра в зависимости от свойств коэффициентов. В конце главы приводятся примеры из квантовой механики.

В последней гл. VIII приводится решение обратной задачи Штурма-Лиувилля, т. е. задачи об определении дифференциального оператора 2-го порядка по его спектру, данное И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном.

В книге содержится большое количество примеров, иллюстрирующих общие теоремы. /М. И. Вишик

См. также: 1252, 1394, 1414, 1417, 1449, 1504, 1511, 1526, 1830

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1615. Броуновское движение с $n = 2p + 1$ параметрами. Леви (Le mouvement brownien à $n=2p+1$ paramètres. Lévy Paul), C. r. Acad. Sci., 1955, 240, № 10, 1043—1044 (франц.)

Изучаются свойства броуновского движения $X(A)$ с $n = 2p + 1$ (p — целое число) параметрами и связанной с ним функции $M(t)$ (соответствующие определения см. РЖМат, 1956, 633).

Указывается, что случайные величины $M'(t')$ и $M(t) - M(u)$, $t' > t > u$, независимы. Для случая пространства Гильберта (т. е. предельного случая $p \to \infty$) сформулирована теорема: $M(t)$ определяется

на $(0 < t < \infty)$, если в одной точке известно ее значение и значения всех ее производных.

Само броуновское движение $X(A)$ определяется внутри замкнутой поверхности S, если в окрестности S задана случайная функция $f(A)$ такая, что $X(A) - f(A) = o(\delta^p)$, где δ — расстояние от A до S.

Для конечного n автор выдвигает предположение, что при заданной $f(A)$ значения $X(A)$ вне и внутри S независимы. И. В. Гирсанов

1616. Общий марковский процесс с дискретным временем. Хопф (The general temporally discrete Markoff process. Hopf Eberhard), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 1, 13—45 (англ.)

Изучаются эргодические свойства однородных марковских процессов с произвольным множеством состояний и дискретным временем.

Пусть X — множество состояний системы, $\mathfrak{F}$ — борелевское поле подмножеств X, причем $X \in \mathfrak{F}$. Марковский процесс задается, обычно, вероятностями перехода $P(x, A)$, где $x \in X$, $A \in \mathfrak{F}$, и при фиксированном x $P(x, A)$ является вероятностной мерой на поле $\mathfrak{F}$, при фиксированном A $P(x, A)$ — $\mathfrak{F}$-измеримая функция от x. Марковским оператором Λ, соответствующим процессу $P(x, A)$, называется линейный оператор

$$\Lambda\varphi(A) = \int_X P(x, A)\,\varphi(dx), \quad \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

Вообще, марковским оператором автор называет линейный оператор Λ, заданный на некотором линейном подпространстве Φ' пространства Φ такой, что 1) $\Lambda\Phi' \subset \Phi$, 2) если для всех A $\varphi(A) \geqslant 0$, то $\Lambda\varphi(A) \geqslant 0$ и 3) $\Lambda\varphi(X) = \varphi(X)$. Подробно обсуждается вопрос о возможности задания таких операторов формулами, аналогичными (1).

Пусть π — некоторая фиксированная вероятностная мера на $\mathfrak{F}$. Обозначим через Φ_π подпространство Φ, состоящее из мер, абсолютно-непрерывных относительно π. В дальнейшем предполагается, что $\Phi' = \Phi_\pi$ и $\Lambda\Phi_\pi \subset \Phi_\pi$. В этом случае изучение оператора Λ сводится к изучению оператора L^*, действующего в $\mathfrak{L}^1_\pi$ и определяемого при всех $\varphi \in \Phi_\pi$ из соотношения $\int_A L^* f(x)\,\pi(dx) = \int_A f(x)\,\Lambda\pi(dx)$, где $\varphi(A) = \int_A f(x)\,\pi(dx)$.

Как известно, динамическая система с дискретным временем, задаваемая взаимно однозначным измеримым преобразованием Tx, $x \in X$, является частным случаем марковского процесса. При этом $L^* f(x) = f(T^{-1}x)$. Цель реферируемой работы — построение эргодической теории для марковских процессов, столь общей, чтобы она включала в себя классические эргодические теоремы для динамических систем. В предыдущих работах на аналогичную тему Иосида, Какутани и Дуб (Iosida K., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16, 43—48; Kakutany S., там же 49—54; Doob J. L., Trans. Amer Math. Soc., 1948, 63, 393—421), изучавшие марковские процессы со стационарным распределением вероятностей, используя так называемый оператор сдвига, действующий в пространстве «возможных течений» процесса, сводили эргодические теоремы для марковских процессов к эргодическим теоремам для динамических систем.

В реферируемой работе основным орудием исследования является следующая максимальная эргодическая теорема, доказываемая без обращения к теории динамических систем. Положим $L^*_k = \sum_0^{k-1} L^{*\nu}$ и $L^{\nu *} = L^*(L^{*\nu-1})$. Пусть $f \in \mathfrak{L}^1_\pi$, $p \in \mathfrak{L}^1_\pi$ и $p(x) > 0$ и пусть A — множество точек x таких, что $\sup_{k \geqslant 1} \{L^*_k f(x) / L^*_k p(x)\} > a$, тогда $\varphi(A) = \int_A f(x)\,\pi(dx) \geqslant a\pi(A)$.

Строится разложение множества состояний X системы на консервативную и диссипативную части. А именно, показывается, что существует однозначное с точностью до множества π-меры нуль разложение пространства $X = CX + DX$ на измеримые подмножества CX и DX такие, что для любой функции $p \in \mathfrak{L}^1_\pi$, $p > 0$, сумма $\sum_0^\infty L^{*\nu} p(x) < \infty$ при почти всех $x \in DX$ и $= \infty$ при почти всех $x \in CX$. Если функция $p = 0$ при $x \in DX$, то и $L^* p = 0$ при почти всех $x \in CX$, и поэтому по марковскому оператору, действующему на X, можно построить марковский оператор, действующий на CX. Ставится одна нерешенная проблема, связанная с влиянием на процесс его диссипативной части.

Предположим теперь, что распределение π является стационарным, т. е. $\Lambda\pi(A) = \pi(A)$ при любом A (или $L^*1 = 1$). Тогда, к изучению оператора L^* сводится также изучение сопряженного к нему оператора L, введенного Крыловым и Боголюбовым, и при обычном определении марковского процесса, определяемого как

$$Lf(x) = \int_X f(y)\,P(x, dy).$$

Доказывается, что при любой функции $f \in \mathfrak{L}^1_\pi$ почти всюду на X существует предел

$$\lim_{n \to 0} n^{-1} L^*_n f(x) = \bar{f}(x)$$

такой, что для любой ограниченной и инвариантной функции h (т. е. такой, что $L^* h = h$) $\int_X fh\,d\pi = \int_X \bar{f}h\,d\pi$. Для ограниченной функции f это было доказано Какутани (1940), при $\int |f| \ln(1 + |f|)\,dx < \infty$ Дубом (1948).

Автор указывает, что хотя полученная им максимальная эргодическая теорема может быть, вероятно, использована для доказательства общей эргодической теоремы о существовании предела отношений $L^*_n f / L^*_n p$ (без предположения о стационарном распределении), однако ему не удалось провести это доказательство до конца. Недавно Харрис и Роббинс (РЖМат, 1955, 1395) получили в этом направлении некоторые весьма частные результаты. Для случая счетного пространства эта проблема была решена Деблиным (1938), РЖМат, 1956, 3695, 3696). Р. Л. Добрушин

1617. О существовании производной у марковских переходных вероятностей. Остин (On the existence of the derivative of Markoff transition probability functions. Austin Donald G.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 4, 224—226 (англ.)

Рассматривается однородный по времени марковский процесс со счетным числом состояний, задаваемый переходными вероятностями $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, $0 \leqslant t < \infty$. В свое время Дуб и Колмогоров показали, что $p_{ij}(t)$ имеют (правые) производные при $t = 0$ (при $i = j$ не обязательно конечные) и Колмогоров высказал гипотезу, что при $t > 0$ функции $p_{ij}(t)$ всегда имеют конечные производные. Автор путем непосредственных оценок, исходя из уравнения Чепмена — Колмогорова и не пользуясь явно вероятностными соображениями, доказывает, что если $p_{ii}(t)$ имеет конечную производную в нуле, то функции $p_{ij}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ имеют непрерывные производные при $t \geqslant 0$. Утверждается, что при том же предположении аналогичными рассуждениями можно получить и другие результаты, например, что

$$\Sigma_i p'_{ij}(t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$p'_{ij}(t_1 + t_2) = \Sigma_k p'_{ik}(t_1)\,p_{kj}(t_2) \quad (t_1 > 0,\ t_2 \geqslant 0).$$

Примечание референта. По словам автора, в неопубликованной работе референта показано, что в общем случае производные $p'_{ij}(t)$ существуют не при всех $t > 0$. В действительности в упоминаемой автором работе референта, находящейся в печати, имеется пример процесса, в котором вторая производная $p''_{12}(t)$ существует не при всех $t > 0$, вопрос же о дифференцируемости $p_{ij}(t)$ в общем случае остается, по-видимому, до сих пор открытым. А. А. Юшкевич

1618. Бесконечно малые операторы марковских случайных процессов. Дынкин Е. Б., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 2, 206—209

Пусть $x(t)$ — измеримый однородный марковский процесс в метрическом фазовом пространстве E, имеющий с вероятностью 1 для всех t пределы справа и слева, U — окрестность точки x и τ_U — «момент первого попадания в множество $E \setminus U$», если $x(0) = x$. Рассматриваются процессы, называемые автором строго марковскими, удовлетворяющие условию

$$P\{x(\tau_U + t) \in M \mid x(\theta), \theta \leqslant \tau_U\} = P\{x(t) \in M \mid x(0) = x_0\},$$

если $x(\tau_U) = x_0$. Для бесконечно малого производящего оператора A полугруппы операторов $T_t f = M_x\{f(x(t))\} = M\{f(x(t)) \mid x(0) = x\}$, где $f \in B$, B — пространство измеримых по Борелю функций на E с равномерной нормой, доказывается теорема 1: если функция Af непрерывна в точке x и если для некоторой окрестности U^0 точки x $M_x(\tau_{U^0}) < \infty$, то

$$Af(x) = \lim_{d(U) \to 0} [M_x f(x(\tau_U)) - f(x)] / M_x \tau_U. \qquad (1)$$

Если пространство C непрерывных функций на E инвариантно относительно полугруппы T_t, а последняя сильно непрерывна в нуле, то имеет место теорема 2: при предыдущих условиях и компактности пространства E, область определения оператора A состоит из тех функций, для которых правая часть формулы (1) существует и непрерывна по x.

Далее получаются результаты Феллера (РЖМат, 1957, 425) о структуре оператора A для марковских процессов на отрезке прямой и выясняется вероятностный смысл входящих в соответствующие выражения функций.

И. И. Гихман

1619. Непрерывные цепи с полными связями кратности p. Теодореску (Lanturi continue cu legaturi complete de multiplicitate p. Theodorescu Radu), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 2, 253—257 (рум.; рез. рус., франц.)

Для характеристики непрерывных цепей с полными связями кратности p, автор вводит функции

$$p_k(t) \text{ и } \psi_{jk}(p_\alpha(t);\ t,\ t + \Delta\tau),$$

удовлетворяющие некоторым условиям. Получается система уравнений

$$\frac{\partial p_{jk}(t)}{\partial t_h} = \Sigma_j p_{ij}(t)\, \chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t),\ s < t, \qquad (1)$$

$$h = 1, 2, \ldots, p,\ p_k(s) = \delta_{ik}.$$

Доказывается: если даны непрерывные функции $\chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t)$, удовлетворяющие условиям

$$\chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t) \geqslant 0 \text{ при } j \neq k,$$

$$\chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t) \leqslant 0 \text{ при } j = k,$$

$$\Sigma_k \chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t) = 0 \text{ при каждом } j$$

и

$$\frac{\partial \chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t)}{\partial t_h} - \frac{\partial \chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t)}{\partial t_l} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \chi^l_{jk}(p_\alpha(t),\ t)}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t_h} - \frac{\partial \chi^h_{jk}(p_\alpha(t),\ t)}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t_l} \right) =$$

$$= \Sigma_r (\chi^h_{jr}(p_\alpha(t),\ t)\, \chi^l_{rk}(p_\alpha(t),\ t) - \chi^l_{jr}(p_\alpha(t),\ t)\, \chi^h_{rk}(p_\alpha(t),\ t),$$

то решение системы (1) единственно, представляет собой вероятность и удовлетворяет функциональному уравнению

$$p_{ik}(s,\ t) = \Sigma_j p_{ij}(s,\ u)\, \varkappa_{ijk}(s,\ u,\ t),\ s \leqslant u \leqslant t,$$

где $\varkappa_{ijk}(s,\ u,\ t)$ для постоянных i и s — основные вероятности непрерывной цепи Маркова кратности p.

По резюме автора.

1620. Непрерывные цепи с полными связями. Онические (Procese aleatoare in lanț continuu cu legături complete. Onicescu O.), Rev. Univ., «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinț. natur., 1954, № 4—5, 73—85 (рум.; рез. русс., франц.)

Обобщается на непрерывный случай понятие цепи с полными связями в случае конечного числа состояний. Вероятности перехода определяются системой уравнений

$$dx / dt =$$

$$= \Sigma_{h=1,\ldots,m} x_h f_{nk}(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ t)\ (k = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

с начальными условиями $x_k(s) = \delta_{ik}$.

Этой системе сопоставляется линейная система

$$dy_k(t) / dt = \Sigma_{h=1,\ldots,m} J_h g_{hk}(t),\ k = 1, \ldots, m,$$

где $g_{hk}(t) = f_{hk}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t);\ t)$, а $x_1(t)$ $x_2(t), \ldots, x_m(t)$ является решением системы (1). При помощи последней системы изучаются эргодические задачи для системы (1). Резюме автора.

1621. Совместное распределение альтернатив, связанных в цепь. Эберль (Die Summenverteilung verketteter Alternativen. Eberl W.), Österr. Ingr-Arch., 1955, 9, № 4, 280—288 (нем.; рез. англ., франц.)

Рассматривается последовательность из n испытаний, каждое с двумя исходами 0 и 1, связанная в цепь Маркова, с матрицей переходных вероятностей $\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha \\ \beta & \bar{\beta} \end{pmatrix}$.

Комбинаторными методами выводятся вероятности перехода за n шагов, вероятности и математические ожидания числа выпадания единиц и предельные выражения для этих величин при $n \to \infty$. Новых результатов работа не содержит. В. А. Волконский

1622. О последовательности некоторых независимых случайных величин. Такахаси (On the series of some independent random variables. Takahashi Shigeru), 金澤大學理科報告, Канадзава дайгаку рика хококу Sci. Repts Kanazawa Univ., 1955, 3, № 2, 209—212 (англ.)

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$ и $\{a_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел. Указываются достаточные условия, накладываемые на $\{a_n\}$, при которых становятся достоверными следующие события:

$$\{\Sigma_n \mid a_n X_n \mid < +\infty\},\ \{\Sigma_n a_n X_n \text{ сходится}\} \text{ и}$$

$$\{\Sigma_n a_n (X_n - \int_{|a_n x| < 1} x\, dF(x)) \text{ сходится}\}.$$

При рассмотрении второго события предполагается, что распределение $F(x)$ симметрично. В. А. Волконский

1623. Аналитические свойства устойчивых распределений вероятностей. Скороход А., В. Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 159—164

Приводятся две теоремы относительно аналитического характера плотностей вероятностей устойчивых распределений с характеристическим показателем $\alpha \leqslant 1$.

1. Если $\alpha < 1$, то плотность устойчивого распределения $p(x)$ является многозначной аналитической функцией с единственной точкой ветвления.

2. Если $\alpha = 1$, а $\beta \neq 0$, то $p(x)$ — аналитическая функция в замкнутой полосе — $c \leqslant \operatorname{Im} x < c$.

Приведены подробные доказательства. Теорема, аналогичная теореме 1, опубликована автором ранее (см. РЖМат, 1955, 877). А. А. Зингер

1624. О некоторых аналитических свойствах устойчивых законов распределений. Золотарев В. М., Скороход А. В., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 4, 181

Излагаются результаты предыдущих работ авторов (РЖМат, 1956, 3179, 3953). Приводятся:

Теорема 1. Если $F(x, \alpha, \beta)$ — функция распределения устойчивого закона с параметрами α, β, то для $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ имеет место равенство

$$F(x, \alpha\delta, 1) = \int_0^\infty F(xu^{-1/\alpha}, \alpha, 1)\, dF(u, \delta, 1).$$

Теорема 2. Пусть $\varphi(s) \to f(x)$ — одностороннее операционное соответствие. Тогда для функции $F(x)$, определяемой из соответствия $\varphi(s^\alpha) \to F(x)$ $(0 < \alpha < 1)$ имеет место представление

$$F(x) = \int_0^\infty f(u)\, p(xu^{-1/\alpha}, \alpha, 1)\, u^{-1/\alpha}\, du,$$

где $p(x, \alpha, 1) = dF(x, \alpha, 1)/dx$. Г. Н. Веселая

1625. Замечание о непрерывном преобразовании случайных величин. Зейц (Poznámka ke spojité transformaci nahodnych velicin. Seitz Jiří), Prazská univ. Moskevské univ. Sb. vyročí 1755—1955, Praha, 1955, 275—282 (чеш.; рез. русс.)

Решается задача: Пусть случайная величина ξ имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения вероятностей $F_1(x)$ пусть $F_2(x)$ — также непрерывная строго возрастающая функция распределения вероятностей: нужно определить такую непрерывную функцию $f(x)$, на множестве всех действительных чисел x, чтобы случайная величина $f(\xi)$ имела функцию распределения вероятностей $F_2(x)$. Из резюме автора

1626. О вкладе чехословацких и советских математиков в теорию цепей Маркова в теории вероятностей. Беранек (O příspěvku československých a sovětských matematiků k rozvoji theorie Markovových řetězů v počtu pravděpodobnosti. Beránek Jiří), Prazská univ. Moskevské univ. Sb. vyročí 1755—1955, Praha, 1955, 183—187 (чеш.; рез. русс.)

1627. О теории дифференциальных уравнений стохастических процессов. Гихман (On the theory of differential equations of stochastic processes. I. Gihman I. I.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, № 1, 111—137 (англ.)

1628 К. Практические занятия по исчислению вероятностей. Жиро (Travaux pratiques de calcul des probabilités. Girault Maurice. Paris. Centre docum. univ., 1953, 53 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 20, 463 (франц.)

1629 Д. Разложение на составляющие комбинации функций распределения вероятностей. Меддеши (Valószinüség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevöire. Medgyessy Pál, Kand. ertekezés tezisei. Tud Minösitö Bizottság, Budapest, 1954 (1955), 7 l.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 2, 53 (венг.)

1630 Д. Стационарные стохастические процессы. Хант (On stationary stochastic processes. Hunt Gilbert Agnew, Jr.—Doct. diss., Princeton Univ., 1948), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 601 (англ.)

1631 Д. Бесконечные перестановки стационарных случайных последовательностей. Каплан (Infinite permutations of stationary random sequences. Kaplan Edward Lynn,—Doct. diss., Princeton Univ., 1951), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 3, 424 (англ.)

1632 Д. Инвариантный принцип для зависимых случайных величин. Биллингсли (The invariance principle for dependent random variables. Billingsley Patrick Paul.— Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2222 (англ.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1633. План контроля, при котором дефектные изделия исключаются из партии. Уэртел (A rectifying inspection plan. Wurtele Zivia S.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 1, 124—127 (англ.)

Рассматривается последовательный план контроля штучной продукции, при котором дефектные изделия исключаются из партии. Критерий контроля: вероятность приема партии, содержащей более D_0 дефектных изделий должна быть не более γ.

Требуется определить относительные объемы выборок $\theta_d = n_d / N$, при которых может быть прекращен контроль, при наличии в пробе $0, 1, \ldots, d, \ldots, N - D_0$ дефектных изделий.

Условие контроля

$$\sum_{i=0}^{D-D_0-1} P_i^N(D) \leqslant \gamma, \qquad (1)$$

где $P_i^N(D)$ — вероятность прекращения контроля в точке (i, θ_i, N), причем i — число обнаруженных дефектных изделий, а θ — относительный объем выборки, и неравенство (1) должно выполняться для $D = D_0 + 1, \ldots, N$. Для $N \to \infty$ автор получает формулы

$$\sum_{d=0}^{D-D_0-1} C_d^D P_d (1-\theta_d)^{D-d} = \gamma, \qquad (2)$$

$$P_d = 1 - \sum_{i=0}^{d-1} P_i (1-\theta_i)^{d-i} C_i^d. \qquad (3)$$

Задавая D_0 и γ, можно по (2) определить θ_0, затем по (3) P_1, далее по (2) определяем θ_1 и т. д.

М. И. Эйдельнант

1634. Некоторые теоремы и достаточные условия для оценок максимального правдоподобия неизвестного параметра простой марковской цепи. Гани (Some theorems and sufficiency conditions for the maximum-likelihood estimator of an unknown parameter in a simple Markov chain. Gani J.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 342—359 (англ.)

Рассматривается простая эргодическая марковская цепь с s состояниями, в которой начальные вероятности a_i и вероятности перехода p_{ij} зависят от неизвестного параметра θ. Пусть T — оценка максимального правдоподобия для θ, вычисленная по наблюденной

последовательности состояний объема $n+1$. Доказывается, что при некоторых условиях гладкости оценка T является состоятельной, асимптотически нормальной со средним значением θ_0 (истинное значение параметра θ) и эффективной. Выясняется общий вид переходных вероятностей $p_{ij}(\theta)$, при которых для параметра θ существует достаточная оценка. А. С. Монин

1635. Доверительные интервалы для параметра распределения, допускающего достаточную оценку, когда широта распределения зависит от параметра. Хузурбазар (Confidence intervals for the parameter of a distribution admitting a sufficient statistic when the range depends on the parameter. Huzurbazar V. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 1, 86—90 (англ.)

Распределение $f(x, \theta)$, $a(\theta) \leqslant x \leqslant b(\theta)$, допускающее достаточную оценку для параметра θ, имеет общий вид $g(x)/h(\theta)$, причем функции $a(\theta)$, $b(\theta)$ должны быть соответственно монотонно возрастающей (убывающей) и монотонно убывающей (возрастающей). Пусть X_1, X_n — наибольший и наименьший члены в случайной выборке объема n из распределения $f(x, \theta)$. Достаточная оценка для θ имеет вид $\hat{\theta} = \min[a^{-1}(X_1), b^{-1}(X_n)]$, если $a(\theta)$ возрастает и $b(\theta)$ убывает, или $\hat{\theta} = \max[a^{-1}(X_1), b^{-1}(X_n)]$, если $a(\theta)$ убывает и $b(\theta)$ возрастает. Устанавливается, что выборочное распределение для $\hat{\theta}$ имеет плотность $n[h(\hat{\theta})]^{n-1} \mid h'(\hat{\theta}) \mid [h(\theta)]^{-n}$, откуда следует, что доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α имеет вид $\{h^{-1}[(1-\alpha)^{-1/n} h(\hat{\theta})], \hat{\theta}\}$. Рассматриваются примеры. А. С. Монин

1636. Вращательный выбор. Эклер (Rotation sampling. Eckler Albert Ross), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 4, 664—685 (англ.)

Рассматривается совокупность, состоящая из бесконечного числа элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots$, значения которых $x_{i1} = \xi_1(t_i)$, $x_{i2} = \xi_2(t_i), \ldots$ меняются со временем t, причем среднее значение совокупности $a(t_i)$ зависит, а дисперсия σ^2 не зависит от времени, корреляция между x_{ik}, x_{jk} равна $\rho^{|i-j|}$, а корреляция между x_{ij}, x_{ik} отсутствует. Решается задача об отыскании линейных несмещенных оценок с минимальной дисперсией для величин $a(t_i)$. Паттерсон (Patterson H. D., J. Roy. Statist. Soc. B, 1950, **12**, 241—255) предложил для этой цели составлять «вращательную выборку с одним уровнем», состоящую из значений вида

$$x_{11}, \ldots, x_{1n}; x_{2,\,1+p}, \ldots, x_{2,\,n+p}; \ldots$$
$$\ldots; x_{i,\,1+(i-1)p}, \ldots, x_{i,\,n+(i-1)p}.$$

При этом оценка для $a(t_i)$ находится как линейная комбинация оценки для $a(t_{i-1})$ и некоторых средних значений, вошедших в выборку элементов в моменты t_{i-1}, t_i; коэффициенты этой линейной комбинации табулированы в зависимости от ρ.

В настоящей работе рассматриваются «вращательные выборки со многими уровнями»; например, в случае «двух уровней» выборка составляется в виде $(x_{11}, x_{21}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n})$; $(x_{2,\,n+1}, x_{3,\,n+1}), \ldots, (x_{2,\,2n}, x_{3,\,2n}); \ldots$ Оцениваются дисперсии рассмотренных оценок. В случае «одного уровня» решаются вопросы об оптимальном выборе p/n и о минимальном значении n при фиксированной дисперсии оценки. Указываются некоторые обобщения. А. С. Монин

1637. Обобщение предварительной оценочной процедуры по дополнительным данным. Хантсбергер (A generalization of a preliminary testing procedure for pooling data. Huntsberger D. V.), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**; № 4, 734—743 (англ.)

Пусть распределение вероятностей для выборки имеет известный функциональный вид, но зависит от двух неизвестных параметров θ_1, θ_2. Пусть $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ — независимые несмещенные нормально распределенные оценки для θ_1, θ_2, имеющие известные дисперсии σ_1^2, σ_2^2. Сведения о значении оценки $\hat{\theta}_2$ позволяют улучшить оценку для θ_1. Именно, в качестве улучшенной оценки для θ_1 предлагается величина

$$W(T) = \varphi(T)\,\hat{\theta}_1 + [1 - \varphi(T)]\,(\sigma_2^2\hat{\theta}_1 + \sigma_1^2\hat{\theta}_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1},$$

где $T = (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}$ нормальная статистика со средним значением $\gamma = (\theta_1 - \theta_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}$ и единичной дисперсией, служащая критерием для проверки нулевой гипотезы $\theta_1 = \theta_2$. Весовая функция $\varphi(T)$ выбирается из класса однозначных, почти всюду непрерывных четных функций, определенных для всех T и принимающих только значения между нулем и единицей.

Доказывается, что несмещенной (т. е. удовлетворяющей условию $EW(T) = \theta_1$ при всех γ) является только функция $\varphi \equiv 1$; эта функция максимизирует интеграл $\int (\sigma_1^2 - D^2)\,d\gamma$, где D^2 — средняя квадратичная ошибка оценки $W(T)$. Весовой функции с равномерно минимальной средней квадратичной ошибкой не существует. Изучаются и сравниваются весовые функции $\varphi_0 = {}^2T/(1+T^2)$; $\varphi_1 = 0$ при $T < t_\alpha$ и 1 при $T \geqslant t_\alpha$ (где t_α — значение нормального отклонения); $\varphi_{ab} = 1 - a\exp(-bT^2)$, А. С. Монин

1638. Приближенные доверительные интервалы. III. Исправления смещенности. Бартлетт (Approximate confidence intervals. III. A bias correction. Bartlett M. S.), Biometrika, 1955, **42**, № 1—2, 201—204 (англ.)

Статья содержит, в основном, исправления к высказанным без доказательств утверждениям предыдущей работы (РЖМат, 1955, 5188) об исключении «мешающих параметров» (nuisance parameters) заменой их оценками максимального правдоподобия. В противоположность утверждению упомянутой работы, при этом может возникнуть смещенность получившейся статистики T_e порядка $1/\sqrt{n}$. Вносятся некоторые изменения в обсуждение примеров работы. Разбираются оценки коэффициента корреляции β для нормальной стационарной марковской последовательности с неизвестными средним и дисперсией и пример оценки параметров двумерного нормального вектора с нулевыми средними. Выборки считаются большими. Ю. В. Линник

1639. Усеченное нормальное распределение на вероятностной сетке. Штанге (Die ausgelessene Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitnetz. Stange K.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1955, **7**, № 3, 193—202 (нем.)

Излагается графический способ определения параметров нормального распределения по данным выборки из генеральной совокупности, получаемой усечением на определенном уровне. Н. В. Смирнов

1640. Об оценке одновременного доверительного интервала. Рамачандран (Contributions to simultaneous confidence interval estimation. Ramachandran K. V.), Biometrics, 1956, **12**, № 1, 51—56 (англ.)

Решаются две задачи: 1) в обычных условиях простейшей схемы дисперсионного анализа устанавливается оценка одновременного доверительного интервала для всех отношений дисперсий

$$i/i' = \sigma^2_i/\sigma^2_{i'} \quad (i \neq i';\ i, i' = 1, 2, \ldots, k);$$

2) в условиях схемы факторного эксперимента находятся одновременные доверительные границы относительно всех линейных функций параметров, через которые выражаются главные эффекты факторов. Приводятся примеры. А. К. Митропольский

1641. Распределение длины и проекций суммы n случайных единичных векторов. Гринвуд, Дьюранд (The distribution of length and components of the sum of n random unit vectors. Greenwood J. Arthur, Durand David), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 233—246 (англ.)

Рассматривается сумма n независимых одинаково распределенных единичных векторов на плоскости с плотностью распределения углов

$$g(\xi) = \exp\{k\cos(\xi - \alpha)\} / 2\pi I_0(k).$$

Приведены оценки максимального правдоподобия для k и α. Находятся совместные и одномерные распределения длины и составляющих суммы, которые можно применять для проверки гипотез относительно величины k и α. Даны таблицы распределения длины суммы векторов при равномерном распределении углов ($k = 0$).

В заключение упоминаются некоторые нерешенные задачи. А. А. Зингер

1642. Ненормальность и дисперсионные критерии. Бокс (Nonnormality and tests on variances. Box G. E. P.), Biometrika, 1953, 40, ч. 3, 4, 318—335 (англ.)

Пусть имеется k групп независимых наблюдений по n_t в t-й группе, $N = \Sigma_t n_t$. Обозначим через s_t^2 выборочную дисперсию t-й группы (с $\Phi_t = n_t - 1$ степенями свободы) и $s^2 = \Sigma_t \Phi_t s_t^2 / \Phi$, где $\Phi = \Sigma_t \Phi_t$.

В качестве критерия для проверки гипотезы о равенстве групповых дисперсий Бартлетт (Bartlett M. S., Proc. Roy. Soc., A, 1937, 160, 268) ввел критерий

$$M_1 = \Phi \ln s^2 - \Sigma_t \Phi_t \ln s_t^2.$$

В случае, когда нулевая гипотеза верна и предполагается нормальность исходных распределений, M_1 распределен в больших выборках как χ^2_{k-1}.

Пусть $M(0; \Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ — критерий, вычисленный по нормально распределенным наблюдениям и $M_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2k}; \Phi_1, \ldots \Phi_k)$ — для наблюдений, извлеченных из совокупностей с мерой эксцесса $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2k}$. Тогда для больших выборок $M_1(\gamma_{21}, \ldots, \gamma_{2k}; \Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ распределен как $\Phi \ln\{\Sigma_t \Phi_t s^2_{d_t f_t}(0) / \Phi\} - \Sigma_t \Phi_t \ln s^2_{d_t \Phi_t}(0)$, где $d_t = [1 + \Phi_t \gamma_{2t} / 2(\Phi_t + 1)]^{-1}$, $s^2_{d_t \Phi_t}(\gamma_2)$ — оценка дисперсии с $d_t \Phi_t$ степенями свободы, основанная на наблюдениях, извлеченных из совокупности, с конечными кумулянтами с коэффициентом эксцесса γ_2.

В случае, когда все γ_{2t} равны γ_2 для достаточно больших выборок $M_1(\gamma_2; \Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ распределен как

$$\delta^{-1}\{\delta\Phi \ln s^2_{\delta\Phi}(0) - \Sigma_t \delta\Phi_t \ln s^2_{\delta\Phi_t}(0)\} = \\ = \delta^{-1} M_1(0; \delta\Phi_1, \ldots, \delta\Phi_k), \qquad (1)$$

где $\delta = (1 + \gamma_2/2)^{-1}$ и при $\gamma^2 \neq 0$ критерий $M_1(\gamma_2)$ асимптотически смещен со средним $(1 + \gamma_2/2)(k-1)$ и стандартным уклонением $(1 + \delta_2/2)\{2(k-1)\}^{1/2}$.

Таким образом, расхождение в среднем относительно стандартного уклонения возрастает с ростом k, а, значит, чувствительность к ненормальности этого критерия прогрессивно растет с ростом k.

В работе показано, что в случае, когда нулевая гипотеза неверна, изменения уровня критерия M_1 могут быть вызваны в одинаковой степени как действительным различием групповых дисперсий, так и ненормальностью исходных распределений. Для островершинных распределений критерий в пределе может показывать несуществующее различие в дисперсиях, а для плосковершинных распределений, наоборот, скрадывать существующие различия в дисперсиях.

Выясняется, что различие в чувствительности критериев для сравнения дисперсий и для сравнения средних к ненормальности распределения вытекает из существенного различия их природы.

Приведенные примеры показывают, что приближение к асимптотическому соотношению (1), по-видимому, идет быстрее, когда эксцесс сопровождается скошенностью, и при большом эксцессе это приближение происходит медленнее. Е. Л. Ющенко

1643. Доказательство основных тождеств анализа ковариаций многих переменных при помощи способа Чебышева — Романовского. Камалов М. К., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 93—106

Рассматривается случайная выборка $1 + m$ переменных $Y, X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$, связанных регрессией

$$Y = a + \sum a_h X_h. \qquad (1)$$

Предполагается, что выборка состоит из n независимых наблюдений y_i, дисперсия всех y_i равна дисперсии Y. По Нейману наилучшим приближением к (1) будет регрессия

$$Y' = a^0 + \sum a_h^0 X^{(h)},$$

где a^0, a_h^0 — коэффициенты минимизирующие форму

$$\sum_i (y_i - a_i - \sum a_h x_i^{(h)})^2.$$

Общеизвестный способ разыскания Y' имеет тот недостаток, что, если к m переменным присоединяются еще новые переменные, все вычисления надо производить заново. Автор излагает свободный от этого недостатка способ В. И. Романовского. С этой целью вводятся

$$\delta y_i = y_i - \bar{y}, \quad \delta x_i^{(h)} = x_i^{(h)} - \bar{x}^{(h)}$$

(где черта обозначает среднее) и величины $\delta u^{(1)}, \ldots, \delta u^{(m)}$, линейно связанные с $\delta x^{(1)}, \ldots, \delta x^{(m)}$, но линейно независимые друг от друга. Уравнение (1) сводится к $\delta Y = A + \Sigma A^{(h)} \delta u^{(h)}$ с коэффициентами, определяемыми методом наименьших квадратов. Предполагается, что N наблюдений, произведенных над $Y, X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$ разбиты на p классов (например, соответственно p факторам, воздействующим на наблюдаемые величины) и q подклассов (повторений наблюдений). Располагая группы $y_{ik}, x_{ik}^{(1)}, \ldots, x_{ik}^{(m)}$ в таблицу с p столбцами и q строками и вводя построчные и постолбцовые средние, переходим к переменным $\delta\bar{y}_{t.} = \bar{y}_{t.} - \bar{y}$, $\delta\bar{y}_{.t} = \bar{y}_{.t} - \bar{y}$, $\delta y_e = \delta y - \delta\bar{y}_{.t}$ и $\delta\bar{u}_{t.}^{(k)}$ и т. д. так, что $\delta\bar{u}_{t.}^{(k)}$ и $\delta\bar{u}_{.t}^{(k)}$ обладают свойством ортогональности. Квадратичные формы $S^{(m)} = \sum_{ih} (\delta y_{ih} - \sum_{k=1}^{m} A^{(k)} \delta u_{ih}^{(k)})^2$, $S_{.t}^{(m)}$, $S_e^{(m)}$ и $R^{(m)} = \sum_{ih} (\delta\bar{y}_{.t} - \sum_k A^{(k)} \delta\bar{u}_{.t}^{(k)})(\delta y_e - \sum_k A^{(k)} \delta u_e^{(k)}) =$

$$= \sum \frac{(\delta u_{.t}^{(k)} \delta u_{.t}^{(k)})(\delta u_e^{(k)} \delta u_e^{(k)})}{(\delta\bar{u}_{.t}^{(k)} \delta\bar{u}_{.t}^{(k)}) + (\delta u_e^{(k)} \delta u_e^{(k)})} (A_{.t}^{(k)} - A_e^{(k)})^2 \text{ подчиня-}$$

ются основному равенству

$$S^{(m)} = S_t^{(m)} + S_e^{(m)} + R^{(m)}. \qquad (2)$$

Если $1+m$ переменным добавится еще одна $X^{(m+1)}$, то все слагаемые этой суммы увеличатся на члены, зависящие лишь от членов индекса $m+1$ и от ранее вычисленных выражений.

Число степеней свободы для $S^{(m)}$, $S_t^{(m)}$ и $R^{(m)}$ равно соответственно $pq-m-1$, $pq-m-p$, $pq-m-1$ и m. Отсюда следует, что каждая из квадратичных форм правой части (2) имеет независимое распределение χ^2.

Аналогичные выводы применяются к методу случайных блоков и латинскому квадрату ($p=q$).

Г. П. Боев

1644. О моментах порядковых статистик из распределения Вейбула. Либлейн (On moments of order statistics from the Weibull distribution. Liebleiн Julius), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 2, 330—333 (англ.)

Пусть x_i $(i=1,\ldots,n)$ — расположенная в порядке возрастания величины выборка из распределений одного из следующих двух типов:

$$G(x) = \begin{cases} 1-\exp[-(-x)^m], & x \leqslant 0, \\ 1 & x > 0; \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ 1-\exp(-x^m), & x > 0; \end{cases}$$

$(m>0)$

Приводятся для указанных распределений значения Mx^k, Mx_ix_j, выражающиеся через гамма- и бета-функции.

С. Х. Туманян

1645. Асимметрия ряда как критерий относительной чувствительности варьирующего признака. Маневич Ш. С., Тр. Казанск. с.-х. ин-та, 1956, вып. 35, 226—231

Из рассмотрения частных случаев утверждается, что чем больше асимметрия распределения признака, тем данный признак «чувствительнее» и что показатель асимметрии позволяет разделить признаки на «первичные» и «вторичные».

Г. П. Боев

1646. Новые вклады в последовательный анализ корреляции. Коломбо (Nuovi contributi all'analisi sequenziale della correlazione. Colombo Bernardo), Industria (Milano), 1955, № 3, 332—343 (итал.)

Пусть ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты корреляции в двух нормальных общих совокупностях π_1 и π_2. Требуется проверить гипотезу H_0, что $\rho_1 > \rho_2$, по сравнению с альтернативной гипотезой H_1, что $\rho_2 > \rho_1$.

Применяя преобразование Фишера при оценке коэффициента корреляции

$$r = \operatorname{th} z, \qquad z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

автор находит основное неравенство последовательного анализа в виде

$$\frac{\ln B}{(n^*-3)\,\delta_0} < \sum_{k=1}^{m}(z_{2k}-z_{1k}) < \frac{\ln A}{(n^*-3)\,\delta_0},$$

где z_{1k} и z_{2k} — значения статистики z в k-ой выборке, взятой соответственно из совокупностей π_1 и π_2; n^* и δ_0 — назначенные числа; наконец, $A=(1-\beta)/\alpha$, $B=\beta/(1-\alpha)$.

А. К. Митропольский

1647. Об одном статистическом критерии Д. И. Менделеева, Романовский В. И., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 107—118

Рассматривается применение теории упорядоченных выборок к статистическому критерию Д. И. Менделеева, заключающемуся в следующем. Пусть

$$x_1', x_2', \ldots, x_N'$$

суть N независимых измерений величины X. Эти величины располагаются в возрастающем порядке

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N,$$

после чего разбиваются на три группы

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m,$$

$$x_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{N-m},$$

$$x_{N-m+1} \leqslant x_{N-m+2} \leqslant \ldots \leqslant x_N,$$

причем число m выбирается равным $N/3$, если N делится на три, или $N/3$, округленное до целых в меньшую сторону, если N не делится на три. Образуются средние

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k; \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{N-m} x_k; \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{m}\sum_{k=N-m+1}^{N} x_k.$$

По величинам разностей

$$u = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\sqrt{m}/\sigma, \quad v = (\bar{x}_3 - \bar{x}_2)\sqrt{m}/\sigma$$

делается заключение о «стройности» ряда измерений. В этом суть критерия Менделеева.

Для случая, когда X — нормально распределенная случайная переменная при $N=6$, автор получил для плотности совместного распределения величин u и v явное выражение.

Для $N>6$ теория критерия Менделеева остается неразработанной. В случае $N>6$ решается задача: определить плотность распределения величин

$$t = (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1)\sqrt{m}/\sigma \text{ и } \theta = (\bar{\eta}_3 - \bar{\eta}_2)\sqrt{m}/\sigma,$$

где

$$\bar{\eta}_1 \leqslant \bar{\eta}_2 \leqslant \bar{\eta}_3$$

суть расположенные в возрастающем порядке величины средние $\bar{x}_1'$, $\bar{x}_2'$, $\bar{x}_3'$ трех выборок неупорядоченного ряда $x_1', \ldots, x_m'$; $x_{m+1}', \ldots, x_{N-m}'$; $x_{N-m+1}', \ldots, x_N'$.

Плотность распределения t и θ имеет вид

$$\varphi(t,\theta) = \sqrt{3}\,\pi^{-1}\exp[-(t^2+t\theta+\theta^2)/3].$$

Приводится таблица вероятностей $P(t \geqslant \alpha, \theta \geqslant \beta)$ для α и β от 0 до 6 через 0,5.

Примечание референта. Утверждение автора, что $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ имеют математическое ожидание $a=E(X)$ неверно, величины $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_3$ будут иметь отличные от a математические ожидания.

А. М. Бендерский

1648 К. Элементы статистики. Мод (Elements of statistics. 2nd ed. Mode Elmer Beneken. Bailey, 1955, 377 pp., 51 sh.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 7, 79 (англ.)

1649 Д. О критериях для аномальных наблюдений. Мерфи (On tests for outlying observations. Murphy Ray Bradford.— Doct. diss., Princeton Univ., 1951), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 425 (англ.)

1650 Д. Выборочные функции стабильных процессов. Мак-Кин (Sample functions of stable pro-

cesses. McKean Henry P., Jr.-Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2230 (англ.)

1651 Д. Оценка объема популяции с использованием последовательной выборки по методу ярлыков. Гудман (The estimation of population size using sequential sampling tagging methods. Goodman Leo A.,— Doct. diss., Princeton Univ., 1950), Dissert Abstrs, 1955, 15, № 4, 599—600 (англ.)

1652 Д. Сравнение экспериментов в бесконечном случае и использование инвариантности при установлении достаточности. Болл (Comparison of experiments in the infinite case and the use of invariance in establishing sufficiency. Boll Charles H.— Doct. diss., Stanford Univ. 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 6, 1078 (англ.)

1653. Д. Проверка сложной симметрии в нормальном распределении со многими переменными. Вото (Testing compound symmetry in a normal multivariate distribution. Votaw David Freeman, Jr.—Doct. diss. Princeton Univ., 1947), Dissert.Abstrs, 1955, 15, № 4, 603 (англ.)

1654 Д. Использование некоторых линейных порядковых статистик, связанных со средними разностями, как несмещенная оценка стандартного отклонения в конечных и бесконечных популяциях. Лотт (The use of a certain linear order statistic, related to the mean difference, as an unbiased estimate of the standard deviation in finite and infinite populations. Lott Fred Wilbur.— Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 9, 1625 (англ.)

1655 Д. Некоторые критерии значимости для медианы, которые действительны при очень общих условиях. Уолш (Some significance tests for the median which are valid under very general conditions. Walsh John Edward.— Doct. diss., Princeton Univ., 1947), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 4, 604 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

1656. Стохастические игры. Шапли (Stochastic games. Shapley L. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 10, 1095—1100 (англ.)

Задано N нулевых конечных игр двух лиц в нормальной форме с матрицами $A^k = (a_{ij}^k \mid i = 1, \ldots, m_k, j = 1, \ldots, n_k)$. Если в k-й игре выбраны соответственно i-я и j-я стратегии, то с вероятностью p_{ij}^{kl} следующей играется l-я игра и с вероятностью s_{ij}^k игра прекращается. Такая состоящая из нескольких этапов игра, начинающаяся с k-й игры, называется стохастической игрой Γ^k.

Значения стохастических игр Γ^k удовлетворяют системе уравнений

$$\Phi^k = \mathrm{val}\,[A^k(\Phi)],\ k = 1, \ldots, N$$

($\mathrm{val}\,[B]$ — значение игры с матрицей B; $A^k(\alpha) = (a_{ij}^k + \Sigma_l p_{ij}^{kl}\alpha^l)$; $\alpha = (\alpha', \ldots, \alpha^N)$ — n-мерный вектор). Стационарной стратегией 1-го (аналогично 2-го) игрока называется вектор смешанных стратегий $x = (x', \ldots, x^N)$, где $x^k = (x_1^k, \ldots, x_{m_k}^k)$.

Стационарные стратегии x^* и y^*, где $x^l \in X[A^l(\Phi)]$, $y^l \in Y[A^l(\Phi)]$, оптимальны для соответствующих игроков в игре Γ^k при любом k ($X[B]$ — множество оптимальных стратегий 1-го игрока в игре с матрицей B).

Приводится выражение для выигрыша стохастической игры через стационарные стратегии. Указываются некоторые частные случаи стохастических игр.

И. В. Романовский

1657. Некоторые бесконечные нулевые игры двух лиц. Далмидж, Пек (Certain infinite zero-sum two-person games. Dulmage A. L., Peck J. E. L.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 412—416 (англ.)

Игра с множествами стратегий I и J и функцией выигрыша K, определенной на $I \times J$, обозначается (I, J, K). Пусть $\xi_R(\eta_R)$ — распределение на множестве R. $K(\xi_R, \eta_Q)$ — обычным образом определенная функция выигрыша (суммирование понимается в смысле Бурбаки (Bourbaki N., Topologie générale. Paris, Herman, 1953, гл. 3, § 4)).

Игра допустима, если

$$\sup_{\xi_I} \inf_{\eta_J} K(\xi_I, \eta_J) \leqslant \inf_{\eta_J} \sup_{\xi_I} K(\xi_I, \eta_J).$$

Пусть $M(N)$ — семейство всех конечных подмножеств $I(J)$, $\lim_i f(i) = A$ означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m \in M$, что для $i \notin m \mid f(i) - A \mid < \varepsilon$ $\lim_{m \in M} f(m) = A$ означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m' \in M$, что для $m \supseteq m' \mid f(m) - A \mid < \varepsilon$.

Теорема. Если игра (I, J, K) допустима, и для каждого $j \in J$ существует такое L_j, что

$$\inf_i K(i, j) = L_j,\ \lim_i K(i, j) = L_j,$$

то игра имеет значение

$$v = \lim_{n \in N} \sup_{\xi_I} \inf_{\eta_n} K(\xi_I, \eta_n),\ v < +\infty,$$

а первый игрок имеет оптимальную стратегию.

Доказана разрешимость бесконечного обобщения игры с прячущимся и ищущим (РЖМат, 1956, 4717 К, 6023).

И. В. Романовский

1658. Заметка о линейном программировании. Пирсон (Note on linear programming. Pearson Carl E.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 205—206 (англ.)

Приводится простое прямое доказательство теоремы: если существуют $x_j \geqslant 0$, минимизирующие форму $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j = b_\alpha$, $i = 1, \ldots, m$, то можно найти эти x_j так, что не более m из них будут отличны от нуля, а соответствующие не нулевым x_j столбцы матрицы $\| a_{\alpha j} \|$ будут линейно независимы.

О. В. Шалаевский

1659. К задаче о бродячем торговце. Мортон, Ланд (A contribution to the «Travelling salesman» problem. Morton G., Land A. H.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 2, 185—194 (англ.)

Обсуждается вопрос о применении линейного программирования к нахождению минимального пути, соединяющего n точек, когда известны расстояния между ними.

И. В. Романовский

1660. Теория динамического программирования, примененная к задаче о сглаживании. Беллман, Гликсберг, Гросс (The theory of dynamic programming as applied to a smoothing problem. Bellman R., Glicksberg I., Gross O.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, 2, № 2, 82—88 (англ.)

Возникающая в теории динамического программирования задача о нахождении последовательности $\{x_k\}$

($x_k \geqslant r_k$), минимизирующей (1)

$$J(x) = \sum_{k=0}^{N} (x_k - r_k) + \alpha \sum_{k=0}^{N} \max(x_{k+1} - x_k, 0),$$

заменяется задачей о нахождении $x(t) \geqslant r(t)$, минимизирующей

$$J(x) = \int_0^T [x(t) - r(t) + \alpha \max(dx/dt, 0)]\, dt. \qquad (2)$$

Когда $r(t)$ — дифференцируемая функция с конечным числом экстремумов на $[0, T]$, минимум функционала (2) в классе абсолютно непрерывных на $(0, T)$ функций $x(t)$ ($c \geqslant x(t) \geqslant r(t)$) достигается на функции

$$\bar{x}(t) = \inf_{0<\tau<\alpha} [\sup_{t-\tau<s<t=\tau+\alpha} r_0(s)],$$

где $r_0(t) = r(t)$, $t > 0$, $r_0(t) = c$, $t \leqslant 0$. Это решение можно использовать как первое приближение решения «дискретной» задачи для последующего применения методов теории линейного программирования.

И. В. Романовский

1661. Вычислительная процедура для проблемы балансирования линий. Джексон (A computing procedure for a line balancing problem. Jackson James R.), Manag. Sci., 1956, 2, № 3, 261—271 (англ.)

Пусть заданы: конечное частично упорядоченное множество A; определенная на A положительная функция $t(a)$; число $\max_{a \in A} t(a)$. Требуется найти такое разбиение A на части $A(1), \ldots, A(N)$, чтобы N было минимальным при соблюдении условий: 1) если a предшествует b, $a \in A(m)$ и $b \in A(n)$, то $m \leqslant n$; 2) $\sum_{a \in A(n)} t(a) \leqslant T$ ($n = 1, \ldots, N$).

Дается конечный алгорифм решения задачи, состоящий в последовательном построении цепочек вида $\{A(1), \ldots, A(m)\}$ для $m = 1, 2, \ldots$. При всяком m каждая из нескольких ранее отобранных цепочек $\{A(1), \ldots, A(m-1)\}$ продолжается всеми возможными с соблюдением условий (1) и (2) способами до цепочки $\{A(1), \ldots A(m)\}$. Затем из набора полученных цепочек часть выбраковывается по определенным правилам, и процесс продолжается. Метод автора рассчитан на нахождение не всех решений задачи, а хотя бы одного.

Приведенная задача имеет следующее происхождение. Для производства некоторого изделия требуется осуществить множество A операций a, частичное упорядочение которых определяется технологическими соображениями. На производство операции a требуется время $t(a)$. Изделие в процессе производства должно последовательно пройти несколько линий, находясь на каждой из них время T. $A(m)$ — набор операций, осуществляемых на m-й линии.

М. К. Гавурин

1662. Некоторые аспекты теории динамического программирования. Белман (Some aspects of the theory of dynamic programming. Bellman Richard), Scripta math., 1955 (1956), 21, № 4, 273—277 (англ.)

На примерах неравенства между арифметическими и геометрическими средними и известной задачи о добыче золота демонстрируется постановка задач теории динамического программирования и метод их решения.

Ю. В. Линник

1663. Закон спроса и предложения. Гейл (The law supply and demand. Gale David), Math. scand., 1955, 3, № 1, 155—169 (англ.)

Работа ставит целью на основе рассмотрения некоторой модели дать абстрактную математическую трактовку этого закона (суть закона — при свободном рынке цены устанавливаются так, что спрос и предложение при них сбалансированы).

В менее общих условиях данная проблема рассматривалась Вальдом (Wald A., Z. Nationalökonomie, 1936, 7, 637—670), а также Эрроу и Дебре (Arrow, Debreu, Econometrica, 1954, 22, 265).

Модель состоит из m экономических единиц $U_1, U_2, \ldots, U_m$, производящих (или потребляющих) блага $G_1, \ldots, G_n$.

Каждому U_i отвечает множество X_i допустимых наборов благ — векторов $x = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$. Системы наборов $x_i \in X_i$ ($i = 1, \ldots, m$) допускаются только такие, что $\Sigma x_i \geqslant 0$ ($\Sigma_j \xi_0^{(j)} \geqslant 0$).

Рассматриваются векторы цен $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ (π_j — цена G_j); $\pi_j \geqslant 0$; $\Sigma \pi_j = 1$; P — множество векторов p.

Каждому U_i отнесена $S_i = S_i(p)$ — функция предложения, при этом: (1) $S_i(p)$ — непустое выпуклое подмножество X_i, (2) если $x \in S_i(p)$, то $xp \geqslant 0$, (3) S_i — непрерывна в том смысле, что график $S_i(p)$ замкнут в пространстве $P \times X_i$. Наличие закона в модели устанавливается теоремой.

Теорема 1. Существует вектор цен p_e и допустимая система наборов $x_1, \ldots, x_m$ так, что $x_i \in S_i(p_e)$ ($i = 1, \ldots, m$). Теорема легко вытекает из следующей, чисто математически формулируемой основной леммы, имеющей характер теоремы о неподвижных точках.

Пусть $S = S(p)$ — ограниченная непрерывная функция, значения которой совокупности из R^n, определенная на $(n-1)$-симплексе P и такая, что: (a) $S(p)$ — непустое выпуклое множество для $p \in P$, (b) если $x \in S(p)$, то $xp \geqslant 0$. Тогда существуют такие $p \in P$ и $x \in S(p)$, что $x \geqslant 0$.

Далее, при дополнительных ограничениях, устанавливается единственность положения равновесия (теорема 3). Специально как на основании общей теоремы, так и прямым рассуждением рассматривается случай модели Леонтьева (теорема 4). Наконец, устанавливается, что функция предложения $S_i(p)$, обладающая перечисленными в теореме 1 свойствами, может быть определена при наличии порядка предпочтения (определенного упорядочения множеств наборов X_i). В определенных условиях положение равновесия оказывается оптимальным в смысле указанного «предпочтения» (теорема 7).

Л. В. Канторович

1664. Дуополистическая задача. Йонгманс (Le problème duopoliste. Jongmans F.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 11—12, 326—365 (франц.)

Рассматривается рынок сбыта продукции двух лиц. На нем выделены особые положения, называемые доминантами, к которым имеется тенденция перехода из других положений ввиду стремления каждого партнера к наибольшей прибыли. Доминанта называется устойчивой, если по каждому шагу одного из партнеров к увеличению прибыли можно указать угрозу другого свести это увеличение на нет. При некоторых естественных предположениях устойчиво положение x, когда достигается максимум суммы чистых прибылей; неустойчивы положения, когда уровень производительности одного из партнеров очень низок.

Указывается стратегия, с помощью которой производитель в определенных условиях может достичь точки x.

С. С. Кислицын

1665. Применение метода Монте-Карло для иллюстрации правила квадратов Ланчестера. Дригс (A Monte Carlo model of Lanchester's square law.

Driggs Ivan), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 148—151 (англ.)

Известны некоторые математические методы в исследованиях, относящихся к военному делу. Автор убедился в трудности изложения этих методов и получаемых с их помощью результатов лицам, не знающим математики. Поэтому он разработал различные варианты игры в кости, с помощью которых моделируются боевые действия и иллюстрируются упомянутые результаты. М. К. Гавурин

1666. Методы анализа тонкой структуры сбыта. Ларьё (Méthodes d'analyse de la structure fine des débits. Larrieu J.), Rev. Statist. appliquée, 1956, 4, № 2, 39—62 (франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1667. О распределении сигнала и шума после детектирования и фильтрации. Мейер, Миддлтон (In the distributions of signals and noise after rectification and filtering. Meyer M. A., Middleton David), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 8, 1037—1052 (англ.)

Авторы решают задачу нахождения функций распределения вероятностей случайного процесса на выходе типового звена, состоящего из двух линейных систем, между которыми находится нелинейная система в предположении, что на вход типового звена подано напряжение, которое является суммой регулярного сигнала и «белого шума» с нормальным законом распределения, и что нелинейная система имеет параболическую характеристику (квадратичный детектор).

В зависимости от вида энергетического спектра на выходе первой линейной системы рассматриваются случайные процессы двух типов: «узкополосный», если спектр сосредоточен в окрестности некоторой частоты f_0 в полосе, ширина которой много меньше этой частоты и «широкополосный», если указанное условие не выполняется.

Узкополосный случайный процесс на выходе первой линейной системы представляется в виде

$$v(t) = [x(t) + M(t)] \cos 2\pi f_0 t + y(t) \sin 2\pi f_0 t. \qquad (1)$$

Здесь $M(t)$ — огибающая сигнала, а $x(t)$ и $y(t)$ независимые, нормальные случайные функции, каждая из которых характеризуется нулевым средним значением, дисперсией $\psi/2$ и корреляционной функцией

$$\rho_{kj} = \rho(t_k - t_j) = 2\psi^{-1} \int_0^\infty w(f - f_0) \cos 2\pi f (t_k - t_j)\, df,$$

$$w(f) = D \mid B(f) \mid^2,$$

где $\mid B(f) \mid$ — частотная характеристика первой линейной системы, D — спектральная интенсивность «белого шума».

Для процессов этого типа определяются функции распределения только огибающей (см. В. И. Бунимович. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Изд-во «Советское радио», М., 1951 г.).

Широкополосный случайный процесс представляется суммой сигнала $s(t)$ и нормального стационарного шума $X(t)$ с нулевым средним значением, дисперсией ψ и корреляционной функцией

$$\rho_{kj} = \psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} w(f) \cos 2\pi f (t_k - t_j)\, df.$$

Получены следующие результаты:

1. Найдено выражение характеристической функции $\Phi_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ n-го порядка огибающей случайного процесса (1) после квадратичного детектирования

$$\Phi_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1 - i\lambda_k)^{-1} \exp\left\{ \frac{i}{1 - i\lambda_k} \left[\sum_{j=1}^{n} M(t_j) \zeta_t f_{kj} \right]^2 \right\}, \qquad (2)$$

где λ_j и f_{kj} определяются системой однородных линейных уравнений

$$\psi \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \rho_{km} f_{jk} = \lambda_j f_{jm}$$

совместно с дополнительными условиями нормализации

$$\sum_{l=1}^{n} \zeta_l f_{kl} f_{jl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l. \end{cases}$$

Характеристическая функция n-го порядка широкополосного случайного процесса после квадратичного детектирования получается из (2) заменой $M(t)$ на $s(t)$ и $\prod_{k=1}^{n} (1 - i\lambda_k)^{-1}$ на $\prod_{k=1}^{n} (1 - i\lambda_k)^{-1/2}$

Частный случай этого результата при отсутствии сигнала был получен ранее в работе Каца и Зигерта (Kac M., Siegert A. J. F.; J. Appl. Phys. (N. Y.), 1947, 18, 383—397).

2. Указан общий метод нахождения характеристических функций случайного процесса на выходе типового звена.

3. Подробно исследован двумерный случай. (Одномерная функция распределения сигнала и шума на выходе типового звена известна из цитированной выше работы и статьи Эмерсона (РЖМат, 1954, 5711).

Формула для двумерной характеристической функции огибающей случайного процесса, прошедшего типовое звено, имеет вид

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \tau) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - i\lambda_k)^{-1} \exp\left\{ \frac{i}{1 - i\lambda_k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(t) [\zeta_1 A(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \zeta_2 A(t - \tau)] f^{(k)}(t)\, dt \right]^2 \right\}, \qquad (3)$$

где λ_k и $f^{(k)}(t)$ — собственные значения и собственные нормированные функции интегрального уравнения

$$\psi \int_{-\infty}^{\infty} [\zeta_1 A(t) + \zeta_2 A(t - \tau)] \rho(t - s) f^{(k)}(t)\, dt = \lambda_k f^{(k)}(s)$$

и $A(t)$ — преобразование Фурье от передаточной функции второй линейной системы. Для реальных систем $A(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Для широкополосного случайного процесса аналогичная формула получается заменой в (3) функции $M(t)$ на $s(t)$ и $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - i\lambda_k)^{-1}$ на $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - i\lambda_k)^{-1/2}$.

4. Рассмотрены два предельных частных случая, когда полосы пропускания второй линейной системы много уже или много шире полосы пропускания первой. В первом случае получается известный результат о сходимости функции распределения к нормальной. Если частотная характеристика второй линейной системы равномерна на всех частотах, то $A(t) = \delta(t)$ и тогда из (3) получается формула для характеристической функции процесса после квадратичного дегектирования.

Примечание референта. Приведенная в статье формула (А.2.12) двумерной функции распределения широкополосного процесса после квадратичного детектирования неверная. Исправленная формула имеет следующий вид

$$W_2(v_1, v_2; \tau) = \{2\pi\psi\,[v_1 v_2 (1-\rho^2)]^{1/2}\}^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{v_1+v_2}{2\psi\,(1-\rho^2)}\right\} \exp\left\{\frac{s_1^2+s_2^2-2\rho s_1 s_2}{2\psi-\rho^2)}\right\} \times$$

$$\times\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{\rho\sqrt{v_1 v_2}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{(s_1-\rho s_2)\sqrt{v_1}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{(s_2-\rho s_1)\sqrt{v_2}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]+\right.$$

$$\left.+\mathrm{sh}\left[\frac{\rho\sqrt{v_1 v_2}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{(s_1-\rho s_2)\sqrt{v_1}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{(s_2-\rho s_1)\sqrt{v_2}}{\psi\,(1-\rho^2)}\right]\right\},$$

$$v_1>0,\quad v_2>0, \qquad (4)$$

где $\rho=\rho(\tau)$, $s_1=s(t_1)$, $s_2=s(t_2)$, $t_2-t_1=\tau$. Точно также неверна и формула (А.2.18), являющаяся частным случаем (А.2.12) при $s\equiv 0$. Исправленная формула получается из (4), если в ней положить $s_1=s_2=0$.

Б. Р. Левин

1668. Проблемы временных рядов в аэронавтике. Пресс (Time series problems in aeronautics. Press Harry), J. Amer. Statists. Assoc., 1955, 50, № 272, 1022—1039 (англ.)

В ряде задач аэронавтики существенную роль играют непрерывные случайные возмущения, как, например, болтанка самолета вследствие атмосферной турбулентности, бафтинг, тряска самолета на взлетной дорожке вследствие ее неровностей. Во многих случаях реакция самолета $y(t)$ на случайное возмущение $x(t)$ может быть описана линейной формулой

$$y(t)=\int_0^\infty x(t_1)\,A(t-t_1)\,dt_1,$$

где $A(t-t_1)$ — переходная характеристика. Если случайные процессы $x(t)$, $y(t)$ стационарны, то между их спектральными функциями $\Phi_x(\omega)$, $\Phi_y(\omega)$ существует соотношение

$$\Phi_y(\omega)=\Phi_x(\omega)\,|\,T(i\omega)\,|^2,$$

$$T(i\omega)=\int_0^\infty A(t)\exp(-i\omega t)\,dt.$$

Переходная характеристика должна определяться теоретически или с помощью специальных экспериментов. В случае гауссовского возмущения указываются простые выражения для частоты $N_c(y)$ выходов кривой $y(t)$ за данный предел y и для частоты $N_p(y)$ максимумов этой кривой, превосходящих значение y.

Приводятся сведения о спектре $\Phi_x(\omega)$ атмосферной турбулентности, создающей болтанку самолетов (в интервале длин волн от 10 до 3000 футов). В качестве примера излагается обработка данных о перегрузках (вертикальных ускорениях) при полете высокоскоростного реактивного снаряда. В качестве объектов дальнейших исследований указываются соотношения между различными характеристиками случайного процесса и его спектром, оценка спектров и взаимных спектров, а также негауссовские процессы и нелинейные системы.

А. С. Монин

1669. Обнаружение неслучайных сигналов в шуме. Дейвис (On the detection of sure signals in noise. Davis R. C.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 1, 76—82 (англ., рез. англ.)

Сравниваются два метода расчета оптимального фильтра: по принципу наибольшей вероятности выделения сигнала и по наилучшему отношению сигнал/шум. На шум входа $N_1(\tau)$ накладываются условия: 1) $N_1(\tau)$ имеет гауссовское распределение, 2) $EN_1(\tau)\equiv 0$, 3) $r(u,v)=EN_1(u)\,N_1(v)$ — функция корреляции есть симметрическая функция u, v в замкнутом квадрате $0\leqslant u\leqslant T$, $0\leqslant v\leqslant T$, положительно определенная в пространстве $L(T)=L$ (пространство действительных значений функций интегрируемых по Лебегу на интервале T). Эти условия исключают шум с «белым» спектром. Входной сигнал $S_1(\tau)$ должен удовлетворять условию

$$\int_{t-T}^{t}[S_1(\tau)]^2\,d\tau<\infty.$$

В дальнейшем требование стабильности фильтра накладывает на $S_1(\tau)$ условие непрерывности.

Рассматривается класс функционалов $G[X_1(\tau)]$, $t-T\leqslant\tau\leqslant t$. Выбирается $G_0[X_1(\tau)]$, где $X_1(\tau)=S_1(\tau)+N_1(\tau)$ так, чтобы

$$P\{G_0[X_1(\tau)\geqslant g]\geqslant P\{G_i[X_1(\tau)\geqslant g]\},$$

где $G[X_1(\tau)]$ — любой функционал из $G[X_1(\tau)]$, [в котором $X_1(\tau)=N_1(\tau)$, g выбирается таким образом, что вероятность того, что $G[X_1(\tau)]\geqslant g$, равна любому, наперед заданному $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$. Используя собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(u)=\lambda\int_{t-T}^{t}r(u,v)\,\varphi(v)\,dv,$$

$X_1(\tau)$ представляется в виде последовательности $\{y_i\}$, где

$$y_i(t)=\int_{t-T}^{t}X_1(\tau)\,\varphi_i(\tau)\,d\tau.$$

Аналогично для $S_1(\tau)$

$$a(t)=\int_{t-T}^{t}S_1(\tau)\,\varphi_i(\tau)\,d\tau.$$

Используя многомерное гауссовское распределение y_i для случая $X_1(\tau)=N_1(\tau)$ и $X_1(\tau)=N_1(\tau)+S_1(\tau)$ и результаты работы Неймана (Neyman J., J. Roy. Statist. Soc., 1942, 105, 292), определяется функционал $G_0[X_1(\tau)]$. Отсюда получается критерий выделения сигнала

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{\lambda_i a_i(t)\,y_i-\lambda_i[a_i(t)]^2/2\}\geqslant g.$$

Рассматриваются два случая: 1) $\Sigma_{i=1}^{\infty}\lambda_i[a_i(t)]^2<\infty$ — приводит к результату $\Omega\geqslant\sigma_0\psi(\varepsilon)$, где Ω есть гауссовская переменная, $\Omega=\lim_{n\to\infty}\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i a_i(t)\,y_i$ и $\psi(\varepsilon)=\sqrt{2}\,\mathrm{argerf}(\pi\varepsilon/2)$, где $\mathrm{erf}(\pi\varepsilon/2)$ — функция Крампфа. 2) $\Sigma_{i=1}^{\infty}\lambda_i[a_i(t)]^2=\infty$. В этом случае вероятность выделения сигнала не зависит от ε. Наконец, показано, что наилучшая оптимальная весовая функция фильтра есть

$$W(\tau,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i a_i(t)\,\varphi_i(\tau).$$

Рассматривая результаты расчета оптимального фильтра по принципу наилучшего отношения сигнал/шум и сравнивая их с предыдущими результатами, автор делает вывод, что в случае гауссовских шумов на входе эти два метода приводят к одному и тому же линейному фильтру.

Формулируются условия стабильности фильтра в зависимости от входного сигнала. Показано, что если сигнал $S_1(\tau)\in L_\infty$, где L_∞ — пространство функций,

сопряженное L, то условием стабильности фильтра будет

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i [a_i(t_0)]^2 < \infty.$$

Если же $S_1(\tau) \in L_2$, то условием стабильности будет $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 [a_i(t_0)]^2 < \infty$.

В заключение дается бесконечная система линейных уравнений, определяющая оптимальный выбор $\{a_i(t)\}$ при условии, что общая энергия сигнала задана и спектр энергии в основном заключен в определенной полосе. В. Н. Иванов

1670. Применение корреляционных методов при изучении сервомеханизмов. Берфорд, Райдаут, Сатер (The use of correlation techniques in the study of servomechanisms. Burford T. M., Rideout V. C., Sather D. S.), J. Brit. Instn Radio Engrs., 1955, **15**, № 5, 249—257 (англ.)

Назначение сервомеханизма (следящей системы) состоит в возможно более точном воспроизведении на выходе сигнала, подаваемого на вход. В работе предлагается оценивать механизм взаимной корреляционной функцией между входом и выходом механизма. Излагаются известные свойства автокорреляционных и взаимно корреляционных функций, их связь с импульсной переходной функцией механизма (т. е. с функцией, характеризующей изменение во времени выходной величины при подаче на вход механизма воздействия в форме импульсной функции Дирака). В качестве меры качества сервомеханизма предлагается использовать максимальное значение взаимной корреляционной функции, зависящее от спектра входного сигнала. Указывается, что метод непосредственно применим только к линейным сервомеханизмам. Применение его к нелинейным сервомеханизмам требует использования быстродействующих корреляторов. Кратко рассматриваются практические способы определения взаимной корреляционной функции, требования которым должны удовлетворять корреляторы, приводятся некоторые сведения о существующих корреляторах. Предлагается метод построения взаимных корреляционных функций, использующий диаграммы рассеивания. Диаграмма рассеивания получается на экране катодного осциллографа при положении к двум парам его пластин напряжений, пропорциональных рассматриваемым двум случайным величинам. При гауссовом распределении такая диаграмма имеет вид эллипса, и взаимная корреляционная функция этих случайных сигналов определяется элементарно по полуосям эллипса. Для сервомеханизма, отличающегося от линейного наличием зазора в передаче, построено семейство взаимных корреляционных функций при различных величинах зазора, а также кривые, характеризующие зависимость от зазора максимального значения взаимной корреляционной функции. М. А. Айзерман

1671. Изучение простой очереди для непрерывного времени с помощью производящих функций. Бейли (A continuous time treatment of a simple queue using generating functions. Bailey Norman T. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 2, 288—291 (англ.)

Решается специальный случай уравнений процесса рождения и смерти, к которым приводит простая очередь с одним обслуживающим лицом, если поток прибывающих покупателей — простейший и продолжительность обслуживания следует показательному закону, стандартным методом производящих функций. Находятся распределение вероятностей длины очереди для конечного времени и распределение длительности периода занятости (обслуживающего лица).

О. В. Шалаевский

1672. Геометрические представления в теории связи. Блох Э. Л., Харкевич А. А., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1955, № 6, 91—100

Представление о цепочке передаваемых сигналов как о многомерном случайном векторе позволяет иллюстрировать геометрически ряд задач теории связи и в некоторых случаях эвристически стимулировать их решение. По мнению референта, значение этого метода авторами переоценивается. Изучение статьи затруднено крайней неотчетливостью изложения.

А. Я. Хинчин

1673. Очередь со специальным видом обслуживания. Кёнигсберг (Queuing with special service. Koenigsberg Ernest), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 213—220 (англ.)

Очередь со специальным обслуживанием может быть определена как очередность обслуживания нескольких объектов разного типа, некоторые из которых могут быть обслужены только на определенных пунктах обслуживания, другие — на всех. Обсуждается только самая простая система этого типа. Предоставляется лишь один вид специального обслуживания на m из a пунктов. Показывается, что обслуживание ухудшается (имея в виду задержку во времени и вероятности задержки) как для объектов, не нуждающихся в специальном обслуживании, так и для объектов, нуждающихся в нем, по сравнению с обслуживанием, предоставляемым в обстановке обычной очереди. Обсуждаются методы составления уравнений для показательного и стандартного времени обслуживания и описываются два грубых приближения, которые доставляют разумные величины задержек и вероятностей задержки объектов, нуждающихся в специальном обслуживании. Иллюстрируется пример грубого приближения. Резюме автора

1674. О расследовании отцовства. Штейнхаус (O dochodzeniu ojcostwa. Steinhaus Hugo), Zastosow. Mat., 1954, 1, № 2, 67—81 (польск.; рез. русск., англ.)

Правильно вычисляется — впервые в профессиональной литературе — вероятность отцовства и вводится в юрисдикцию теория вероятностей.

В судебных делах по расследованию отцовства одним из средств доказательства является серологическая экспертиза. Исследуя группы крови ребенка, матери и вызванного мужчины, можно в некоторых случаях (около 10% всех экспертиз) исключить отцовство вызванного, т. е. решить на основании законов наследственности групп крови, что вызванный не является отцом данного ребенка данной матери. В остальных 90% экспертиз решительный ответ не получается. Пользуясь правилом Бейеса, автор вычисляет вероятность отцовства на основании результатов экспертизы (в случае исключения она, очевидно, равна нулю). Априорная вероятность, выступающая в правиле Бейеса, получена путем сравнения числа исключений в материале 1515 экспертиз (проведенных Институтом микробиологии Медицинской академии во Вроцлаве) с ожидаемым числом исключений. Эта вероятность в условиях Польши равна приблизительно 71%. Условные вероятности вычислены на основании частоты соответствующих групп крови среди польского населения и законов наследственности. Автор подробно обсуждает значение вычисленной вероятности и ее использования юристами. Одним из самых интересных применений является исследование статистического согласия судебных решений по расследованию отцовства с материальной правдой. Автор намерен подробно разработать вопрос и обсудить результаты собираемого материала судебных решений в следующих трудах.

J. Łukaszewicz

1675. О суперпозиции процессов восстановления. Кокс, Смит (On the superposition of renewal processes. Cox D. R., Smith Walter L.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 91—99 (англ.)

Рассматривается случайная стационарная последовательность моментов времени t_i (моментов «появления сигналов») $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, t_i \leqslant t_{i+1}$ в предположении, что величины $t_{i+1} - t_i$ независимы при различных i, величины $t_{i+1} - t_i$ не зависят от t_i (при том же самом i) и что $P\{t_{i+1} - t_i < x\} = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция распределения. Изучается асимптотическое поведение при $t \to \infty$ дисперсии $V(t)$ числа сигналов за отрезок времени длины t. Для случая t_i, принимающих лишь целые значения, более общие результаты получены Феллером (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 98). Далее рассматривается совокупность N независимых последовательностей $\{t_i^{(k)}\}$, $k = 1, \ldots, N$, сигналов описанного типа с общей функцией $F(x)$ и совокупная случайная последовательность сигналов, составленная из всех $\{t_i^{(k)}\}$, расставленных в порядке возрастания. Исследуется распределение времени между двумя соседними сигналами в этой совокупной последовательности. Показывается, что при $N \to \infty$ число сигналов за время const/N имеет асимптотически распределение Пуассона. Этот факт предлагается как одно из объяснений пуассоновского распределения числа вызовов, поступающих на телефонную станцию.

Исследуется применение описанной схемы в нейрофизиологии. При этом $t_i^{(k)}$ — моменты возникновения сигналов, посылаемых каждым из N нейронов в общую центральную нервную ячейку. На основе полученных результатов анализируется опытный материал, и описанная модель процесса сравнивается с другими возможными моделями (см. РЖМат, 1954, 3394).

Р. Л. Добрушин

1676. Заметка об инфекционных распределениях. Томпсон (A note on contagious distributions. Thompson H. R.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 268—271 (англ.)

Рассматривается распределение растений на плоском участке. Предполагается: 1) что вероятность появления одного потомка в квадрате R со стороной h, содержащем точку (ξ, η), где находятся родители (центры), равна $P(\xi, \eta)$; 2) вероятность появления n потомков дается функцией $p(n)$; 3) появление потомков — независимые события; 4) вероятность появления 1 центра в бесконечно малом квадрате $d\xi d\eta$ равна $md\xi d\eta$, а вероятность появления более одного центра $o(d\xi d\eta)$.

В этих предположениях выводится производящая функция числа потомков в R, обязанных своим появлением всеми центрами. Далее преобразовывают ее к полярным координатам, предполагая $P(\xi, \eta)$ зависящей только от расстояния. Сравнивается степень заражения (contagion) распределения с различными $P(r)$ и $p(n)$ посредством сравнения отношений μ_2/μ_1^2. Статья является развитием работ Дарвина и Неймана, как указывает автор.

Н. Н. Ченцов

1677. О субнормальной дисперсии в совокупностях случайно распределенных частиц. I. Приближенное решение трехмерного случая и обсуждение экспериментов. Врис (On the subnormal variance in the counts of randomly distributed particles: I. Approximate treatment of the three-dimensional case and discussion of experiments. Vries Hessel de), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 237—244 (англ.)

Пусть на некотором отрезке распределены n частиц конечного размера, каждая из которых распределена равномерно на части отрезка, не занятой остальными частицами. Если через f обозначить часть отрезка, занятого частицами, то при малых f имеет место приближенная формула $\sigma^2 = n(1 - 2f)$, где σ^2 — среднее квадратичное отклонение частиц. Автор утверждает, что в случае частиц, распределенных на площади и в объеме при малых f (f — часть объема или площади занятого частицами), $\sigma^2 = n(1 - 4f)$ в случае плоскости, $\sigma^2 = n(1 - 8f)$ в случае пространства. Отсутствие точных формулировок делает работу мало обоснованной в математическом отношении.

А. В. Скороход

1678. Логистика и вероятность. Бартелеми (Logistique et probabilités. Barthèlemy C.), Forces aériennes franç., 1954, 9, № 89, 199—211 (франц.)

Поломки самолетов являются случайными, поэтому планировка ремонта, подсчет количества часов полета для данного числа самолетов и расчет других подобных величин вызывают трудности.

Статья посвящена установлению соответствующих формул расчета, исходя из элементарных вероятностных соображений.

Получено четыре формулы:

$$Up = 0{,}7X; \quad Vm = (1 - U_0)X;$$
$$Vm_0 = (Vm - LU_0)/(1 - U_0);$$
$$R = U_0/Vm,$$

где X — количество часов полета, для которых наблюдается статистически одна поломка; U_0 — процент самолетов, которые достигли предела изношенности, т. е. количества часов полета L, после которых самолет не пригоден для полетов и идет в капитальный ремонт; $1 - U_0$ — процент самолетов, которые сломались, не достигнув этого предела; Up — вероятная жизнь самолета; Vm — средняя жизнь самолета. Vm_0 — средняя жизнь только сломанных самолетов; R — процент изношенности.

Важное значение имеет коэффициент изношенности $\lambda = L/X$.

Далее разобран пример для $X = 450$ часов и $L = 1000$ часов, но в связи с допущением грубой ошибки ($\lambda = 1000/450 = 1{,}22$, вместо 2,22) все результаты сильно искажены. Для удобства расчетов приведены графики зависимости различных величин от λ. Приводятся приближенные формулы для $\lambda < 1$ и для $1 < \lambda < 2$.

Л. Е. Майстров

1679. Показатель увеличения стабильного народонаселения и вариация смертности. Цвинги (Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung und Variation der Sterblichkeit. Zwinggi Ernst), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 3, 391—394 (нем.)

Пусть a, b — границы размножаемости, $p_0(y)$ — вероятность новорожденному достичь возраста y, μ_y — интенсивность смертности согласно некоторой основной таблице, μ'_y — новая (измененная) интенсивность смертности в интервале (a, b). Тогда новая вероятность дожить от возраста 0 до возраста y приближенно равна

$$p'_0(y) = p_0(a)\,[p_a(y) - \alpha s_1(y) + \alpha^2 s_2(y)],$$

где $p_a(y)$ — вероятность дожития от a до y $s_1 = q_a(y) - q_a^2(y)/2$, $s_2 = q_a^2(y)/2$, $q_a = 1 - p_a^2$. Из условия стабильности населения

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p'_0(y)\, f(y)\, dy,$$

где r — показатель увеличения населения, $f(y)$ — интенсивность размножения, можно найти величину $\varepsilon =$

$= e^{-r} - 1$. Приближенное решение этой задачи приводит к уравнению

$$\lambda_2\varepsilon^2/2 + \lambda_1\varepsilon + \ln V_0 = 0,$$

где

$$\lambda_1 = V_1/V_0,\ \lambda_2 = V_2/V_0 - \lambda_1^2,\ V_0 = R_0^0 - \alpha R_0^1,$$

$$V_1 = R_1^0 - \alpha R_1^1,\ V_2 = R_2^0 - R_1^0 - \alpha\,(R_2^1 - R_1^1),$$

$$R_k^i = \int_a^b y^k h_i(y)\,dy,\ h_i = p_0(a)\,f(y)\,s_i(y),\ s_0 = 1.$$

Приводится таблица численных значений ε в зависимости от α (от 0,2 до —0,8). В частности, для $\varepsilon = 0$ (стационарное народонаселение) $\alpha = 3.5484$. Г. П. Боев

1680. Теория информации и оптическое отражение. Линфут (Information theory and optical images. Linfoot E. H.), J. Opt. Soc. America, 1955, **45**, № 10, 808—819 (англ.)

1681. Математика страхового дела, экономики и финансов. Лорей (Versicherungs-, Wirtschafts- und Finanzmathematik. Lorey W.), Naturforsch. und Med. Deutschland, 1939—1946 (1953), **3**, 199—203 (нем.)

1682. 3-й Лондонский съезд по теории информации. Блакман (The Third London Symposium on Information Theory. Blachman Nelson M.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, **2**, № 1, 17—23, 44 (англ.)

1683. Применение математики к биологии, медицине и науке о народонаселении. Гепперт (Anwendungen der Mathematik auf Biologie, Medizin und Bevölkerungswissenschaft. Geppert M. P.), Naturforsch. und Med. Deutschland, 1939—1946 (1953), **3**, 205—231 (нем.)

1684. Расчет и оценка ссуд и процентов до и после ссуды. Тедески (Ammortamenti e valutazioni di prestiti a tassi di interesse posticipati e anticipati. Tedeschi Bruno), Archimede, 1955, **7**, № 6, 256—263 (итал.)

См. также: 1118, 1222, 1454, 1455, 1529, 1600, 1844

ГЕОМЕТРИЯ

1685. Об антиграфии. До (Sur l'antigraphie. Deaux R.), Mathesis, 1955, **64**, № 6—8, 254—261 (франц.)

На плоскости комплексного переменного «антиграфия» σ задается равенством

$$(\bar{z} - \bar{e})(z' - m') = rc^{i\theta}, \qquad (1)$$

где z, z' — аффиксы соответствующих точек, а l и m' — аффиксы граничных точек L и M' преобразований σ и σ^{-1}. Каждая антиграфия может быть представлена ∞^1 способами как произведение инверсии (J) с центром в точке P и преобразования S, определяемого равенством $z' = \alpha z + \beta$. Рассматриваются общие свойства преобразования (1), а также некоторые его частные случаи. Так, например, если точки L и M' совпадают, то в случае $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ σ есть произведение инверсии на вращение вокруг точки $L \equiv M'$ на угол θ.

В общем случае прямой LZ соответствует в σ прямая $M'Z'$, при этом $LZ \cdot M'Z' = r$ и $(\overline{LZ}, \overline{M'Z'}) = \theta$. При $\theta \neq 0, \pi$ получается окружность Γ как геометрическое место точек пересечения этих прямых. Преобразование σ переводит Γ в прямую Γ', параллельную LM'. Точки пересечения Γ и Γ' суть двойные точки преобразования, которое в соответствии с этим получает название эллиптического, гиперболического или параболического. Доказывается целый ряд частных предложений. Н. И. Кованцов

1686. Геометрические признаки линейной независимости моторов по их изображениям на чертеже. Посвянский А. Д., Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1954, вып. 43, 247—259

Известному аналитическому, в форме определителя, признаку линейной независимости шести моторов дается геометрическое истолкование. С помощью этого истолкования получаются необходимые условия линейной независимости шести моторов, для некоторых частных случаев их расположения. Рассмотрены и некоторые достаточные условия линейной независимости 2, 3, 4 и 5 моторов. С. Г. Кислицын

1687. Непрерывно меняющиеся фигуры. Кампеделли (Le figure variabili par successioni insensibili. Campedelli Luigi), Illustr. scient., 1956, **8**, № 75, 13—17 (итал.)

Отмечая, что методы геометрии Евклида статичны и лишены динамичности алгебры и проективной геометрии, автор приводит примеры из элементарной и аналитической геометрии, где при доказательстве теорем можно избежать статичности, применяя движение и непрерывные изменения. Так, при доказательстве теорем об измерении углов в круге можно от вписанного угла легко перейти к углу, образованному касательной и хордой; при изучении радикальной оси двух окружностей непрерывными изменениями можно перейти от пересекающихся окружностей к касающимся и к окружностям, не имеющих общих точек; при изучении сечения конуса плоскостью пользоваться непрерывным изменением плоскости для получения различных конических сечений. Далее рассматривается принцип Понселе о непрерывности геометрических фигур. С. И. Зетель

1688. Некоторые вопросы, относящиеся к построениям с помощью циркуля и линейки. Хесс (Certain topics related to constructions with straightedge and compasses. Hess Adrien L.), Math. Mag., 1956, **29**, № 4, 217—221 (англ.)

Исторический очерк с элементарными объяснениями предмета трех категорий вопросов, связанных с геометрическими построениями:

1. Геометрография, или учение о геометрических построениях посредством заданных инструментов, в частности, циркулем и линейкой.

2. Создание геометрических конфигураций путем образования прямолинейных складок на плоской поверхности (практически сгибанием бумаги).

3. Создание геометрических конфигураций методом композиций конгруэнтных прямолинейных отрезков (практически складывание спичек). К. С. Сцилард

1689. Формулы и вспомогательные вычислительные средства к развертыванию конуса второго порядка. Вундерлих (Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. Wunderlich W.), Österr. Ingr-Arch., 1956, **10**, № 1, 107—114 (нем.)

Основная цель работы — дать удобные способы вычисления угла 4ω при вершине развертки конуса второго порядка через экстремальные углы его осевых сечений 2α и 2β. Приводится таблица значений ω для различных значений α и β, следующих друг за другом через интервал в 5°. Строятся линии уровня поверхности $\omega = \omega(\alpha, \beta)$, а также ее профили для $\beta/\alpha = \text{const}$. Дается приближенная формула для вычисления ω:

$$\omega \approx \alpha + \left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha - \alpha\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1,4}.$$

Строится номограмма (при $\alpha \geqslant \beta$) с прямолинейными шкалами для β и ω и криволинейной для α. Наконец, для той же цели строится трехшкальная счетная линейка. Н. И. Кованцов

1690. Об одном способе использования прямого кругового цилиндра для проведения прямых линий. Тенка (Un modo particolare di usare cilindri retti circolari per tracciare linee rette. Tenca Luigi), Period. mat., 1955, **33**, № 4, 226—229 (итал.)

Со ссылкой на рукопись Флорентинской библиотеки сообщается, что Антонио Нарди из окружения Галилея дал способ решения при помощи прямого кругового цилиндра задач, решаемых циркулем и линейкою. Выполнение этих построений не дается. И. Я. Депман

1691. Краткие сведения о деятельности семинара за период времени с 1.VII 1950 г. по 1.VII 1954 г., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 15—21

Статья содержит список 74 докладов, иногда с краткой аннотацией.

1692. Интуитивная геометрия. Жеронне (Géométrie intuitive. Jéronnez L.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 175, 206—210 (франц.)

К методике преподавания элементарной геометрии.

1693. Об основном законе кристаллографии Е. С. Федорова. Шубников А. В., Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1955, вып. 11, 18—32

Статья общего характера, посвященная анализу творчества Е. С. Федорова, содержит некоторые явно неверные утверждения. И. М. Яглом

1694. Геометрические преобразования как интуитивное введение в высшую математику. Бостелс (Les transformations géométriques comme introduction intuitive aux mathématiques supérieures. Bosteels G.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 175, 210—221 (франц.)

1695 К. Плоские алгебраические кривые. Примроз (Plane algebraic curves. Primrose E. J. F. London. MacMillan, 1956, 111 p.) (англ.)

Дается написанное с большим знанием дела руководство к определению элементов, необходимых для построения алгебраической кривой. Автор избегает затруднительных доказательств: например, не затронут вопрос о существовании ветви кривой, проходящей через кратную точку.

После построения рациональных кривых по их параметрическим уравнениям и главы о линейных координатах коротко рассматриваются квадратичные преобразования, счет кратности точки пересечения алгебраических кривых, плюккеровы уравнения, в отдельной главе — кривые 3-го порядка и понятие рода кривой.

Не обременяя материалом, автор дает представление об основных понятиях и проблемах в том объеме, который необходим для докладов в просеминаре 2-го курса. С. П. Фиников

1696 К. Новая геометрия. Одзаки (重點演習.幾何.高見亘. 三省堂. 245 頁, 190 圖, Юсэйдо, 1954, 342 стр., 270 иен (япон.)

1697 К. Проблемы геометрии. Окамото. (幾何.完全問題集.岡本石根等.森北出版.198 頁, 110 圖 Морикита-сюппан, 1954, 198 стр., 110 иен (япон.)

1698 К. Аналитическая геометрия пространства. Для студентов педагогических институтов. Стефанович (Аналитичка геометрија у простору. За студенте виших педагошких школа. Стефановић Ратомир. Београд, «Научна књига», 1956, 163 стр., ил.), Bibliogr. jugosl., 1956, **7**, № 9, 328 (сербо-хорв.)

1699 К. Курс дифференциальной геометрии. Михэйляну (Curs de geometrie diferențială. Mihăileanu N. Inst. pedagog. Timişoara, Bucureşti, 1955, 248 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 7, 255 (рум.)

1700 К. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Станчу (Culegere de probleme de geometrie diferențială. Stanciu P. Inst. pedagog., Timişoare, 1955, 118 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 7, 256 (рум.)

1701 Д. Конфигурационная характеристика коммутативности в проективных пространствах. Аль-Дхахир (Configurational characterizations of commutativity in projective spaces. Al-Dhahir Mohammad Wassel.— Doct. diss., Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 597 (англ.)

1702 Д. К вопросу о методике изложения аналитической геометрии в высших технических и экономических учебных заведениях. Никитин П. П. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1956

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1703. О некоторых задачах динамики. Баккес (Sur quelques problèmes de dynamique. Backes F.), Mathesis, 1954, **63**, № 1—2, 5—9 (франц.)

Интегрирование кеплеровых уравнений движения производится геометрическим методом. Автор использует известное свойство, в силу которого характеристические точки переменного круга симметричны относительно касательной к кривой, описанной центром круга. Геометрически изучается траектория материальной точки в безвоздушном пространстве. Геометрически решаются и другие задачи динамики. С. И. Зетель

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1704. О простейшей теореме инцидентности в сети Мёбиуса. Арци (On the simplest theorem of incidence in Möbius' net. Artzy Rafael), Riveon Lematematika, 1954, **7**, 77—78 (иврит.; рез. англ.)

Используя методы статьи (РЖМат, 1956, 9072), автор приводит новое доказательство теоремы Р. Моуфанг (Math. Ann., 1931, **105**, 536—601) о том, что всякая теорема инцидентности сети Мебиуса следует из некоторого постулата, относящегося к полному четырехугольнику. L. Levitzki

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 551.

1705. Замечание о мероопределении Кэли — Клейна. Ацел, Варга (Bemerkung zur Cayley — Kleinschen Maßbestimmung. Aczél J., Varga O.), Publs mat., 1955, **4**, № 1—2, 3—15 (нем.)

Рассматривается плоская система Кэли—Клейна с невырожденным абсолютом и устанавливается формула для расстояния между двумя точками без использования

теории групп Ли и без введения понятия элемента длины.

На плоскости вводятся однородные нормированные проективные координаты и определяется скалярное произведение точек:

$$(a, b) = \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 + a_3 b_3$$

для эллиптического и (нижние знаки) гиперболического мероопределения.

Доказывается, что всякий инвариант конечной системы точек является функцией пар скалярных произведений этих точек. (Для эллиптического мероопределения см. Бляшке «Дифференциальная геометрия», т. 1, О. Н. Т. И., 1935, 18—23). Доказательство для гиперболического мероопределения ведется процессом ортогонализации и нормирования после установления факта, что матрицы гиперболических преобразований допускают трехпараметрическое вещественное представление.

Расстояние между двумя точками определяется как инвариантная относительно преобразований координат, непрерывная, положительная, аддитивная (на прямой) функция. Аддитивность выражается функциональным уравнением

$$f\left(\frac{1+s^2-t^2}{2s}\right)+f\left(\frac{1-s^2+t^2}{2t}\right)= f\left(\frac{1-s^2-t^2}{2st}\right),$$

которое сводится к $g(u+v) = g(u)\,g(v) + \sqrt{(g^2(u)-1)(g^2(v)-1)}$ и имеет решение $g(x) = \mathrm{ch}(cx)$.

Отсюда окончательный результат $d_{12} = k \arccos(a_1 a_2)$ для эллиптического мероопределения и $d_{12} = k\,\mathrm{arch} \langle a_1 c_2 \rangle$ для гиперболического.

Авторы нигде не пользуются дифференцируемостью. Такой подход к определению расстояния в системах Кэди—Клейна является новым, в литературе не встречался, хотя сам результат очевиден из модели геометрии Лобачевского на гиперболоиде, а эллиптической — на сфере.

Опечатка: в формуле (47) вместо $a_1 a_2$ должно быть $a_1 a_3$. Р. И. Пименов

1706. Проективно-синтетическое доказательство теоремы Н. М. Бескина. Джапаридзе И. С. В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., Гостехиздат, 1955, 100—104

Вторичное изложение результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1956, 4760). Н. М. Бескин

1707. О полукруговом треугольнике в плоскости Лобачевского. Коба (Про півколовий трикутник у площині Лобачевського. Коба В. І.), Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, **21**, 229—231 (укр.)

Установлены некоторые зависимости между элементами треугольника, вписанного в окружность так, что одна из его сторон является диаметром этой окружности. Рассмотрен также случай, когда окружность вырождается в предельную линию и треугольник становится асимптотическим. А. С. Смогоржевский

1708. О постулате непрерывности прямой линии и некоторых его применениях в проективной геометрии. Ше (Sul postulato della continuità della retta ed alcune sue applicazioni alla geometria proiettiva. Sce Michele), Period. mat., 1955, **33**, № 5, 297—308 (итал.)

В проективной геометрии имеет место следующая основная теорема Штаудта: В проективном соответствии, установленном между точками одной и той же прямой, не может существовать более двух двойных точек, если это соответствие не сводится к тождественному. Строгое и полное доказательство теорем Штаудта приведено, например, в книге Н. А. Глаголева «Проективная геометрия», 1936 г. Известно, что без использования постулата непрерывности доказать теорему Штаудта невозможно (см., например, Андреев К. А., Об изложении начал проективной геометрии, СХМО, 1880, 139—166).

В реферируемой статье предлагается новый вариант доказательства теоремы Штаудта, основанный на постулате непрерывности прямой. В доказательстве используются основные операции проективной геометрии — проектирование и пересечение, а также аксиомы Архимеда и Дедекинда.

Полученные результаты автор применяет к доказательству теоремы о наличии второй общей точки двух конических сечений, если в первой общей точке они не соприкасаются; кроме того, полученные результаты применяются для построения двойных точек проективного соответствия в совмещенных плоскостях, если соответствие не сводится к гомологии. М. П. Черняев

1709. Различные метрики проективной плоскости. Ди Ной (Le varie metriche del piano proiettivo. Di Noi Salvatore), Period. mat., 1953, **31**, № 5, 296—313 (итал.)

Рассматриваются шесть проективных мероопределений на плоскости (исключены эллиптическая, гиперболическая и евклидова геометрии). Перечисляются общие свойства движений всех этих мероопределений. Для каждой геометрии указываются «стандартные» гомологи, порождающие всю группу движений; во всех случаях проводится классификация движений. Выписаны формулы для расстояний между точками и углов между прямыми; отмечается наличие изотропных прямых; проверяется выполнимость неравенства треугольника, в связи с которым рассматривается вопрос о том, является ли прямая кратчайшей. В качестве следствий полученных формул приводятся некоторые геометрические теоремы, включая теоремы косинуса и синуса для ряда геометрий. Н. М. Макарова

1710. Пучки полярности в проективном пространстве. Шустер (Pencils of polarities in projective space. Schuster Seymour), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 119—144 (англ.)

Опираясь на результаты исследования Коксгера (РЖМат, 1956, 5443), автор строит полярное соответствие на плоскости с помощью пятиугольника и исследует все возможные случаи. Некоторые из этих случаев не могут быть учтены, если устанавливают полярность с помощью автополярного треугольника.

В дальнейшем автор обобщает полученные им результаты на трехмерное пространство, используя для этого автополярный тетраэдр, и связывает эти обобщения с поверхностями второго порядка.

Изложение весьма подробное; каждый из полученных автором результатов геометрически поясняется с помощью сетей конических сечений и поверхностей второго порядка. М. П. Черняев

1711. Истолкование гиперболической тригонометрии на основании круговой модели Пуанкаре. Сас (A hiperbolikus trigonometria leolvasása a Poincaré-féle körmodellről. Szász Pál), Magyar. tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1956, 6, № 1, 73—80 (венг.)

См. РЖМат, 1955, 3915.

1712. Вывод формул гиперболической тригонометрии на полуплоскости Пуанкаре. Сас (A hiperbolikus trigonometria előállítása a Poincaré-féle félsík utján. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1956, 6, № 1, 81—85 (венг.)

См. РЖМат, 1954, 5745.

1713 К. Проективная геометрия. Четверухин (Geometrie proiectiva. Cetveruhin N. F.

Trad. din limba rusă. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 387 p., il.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 7, 253 (рум.)
Перевод с русского (РЖМат, 1956, 685 К)

1714 К. Три сочинения по геометрии. Геометрия. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Пангеометрия. Лобачевский Н. И., М., Гостехиздат, 1956, 415 стр., илл., 14 р. 60 к.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1715. О подобных и подобно проектирующихся конических сечениях на поверхностях второго порядка. Браунер (Über die ähnlichen und sich ähnlich projizierenden Kegelschnitte auf Quadriken. Brauner H.), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 78—86 (нем.)

Предварительно рассматривается задача об отыскании огибающей семейства прямых, пересекающих пару конических сечений, лежащих в одной плоскости, в четверке точек с постоянным значением определяемого ими сложного отношения; вообще говоря, эта огибающая оказывается кривой четвертого класса, 12-го порядка, имеющей в точках пересечения данных конических сечений двойные точки, в которых она касается этих конических сечений. Исследуются частные случаи.

Задача об отыскании ∞^2 плоскостей, секущих данную поверхность второго порядка по подобным между собой коническим сечениям, сводится к предыдущей, причем в качестве пары конических сечений фигурируют бесконечно удаленная кривая данной поверхности и абсолютный круг несобственной плоскости. Искомые плоскости огибают, в общем случае, в несобственной плоскости кривую 4-го класса, 12-го порядка.

Также получается следующий результат: все плоскости, пересекающие поверхность второго порядка по коническим сечениям, проекции которых из фиксированного центра на фиксированную плоскость подобны между собой, огибают, вообще говоря, в плоскости, проведенной через центр проекций параллельно плоскости проекций, кривую 4-го класса, 8-го порядка. Для обоих задач разобраны частные случаи.

В. В. Рыжков

1716. О кривых 3-го порядка, допускающих несколько квадратичных аналлагматических преобразований посредством изогональных точек. Брике (Sur les cubiques admettant plusieurs anallagmaties quadratiques par points isogonaux. Briquet André), Rev. math. spéc., 1955, 66, № 4, 93—97 (франц.)

Окончание работы, опубликованной под тем же заголовком в том же журнале (РЖМат, 1956, 7569). Доказаны еще две теоремы, в первой из которых речь идет о необходимом и достаточном условии, чтобы кривая 3-го порядка Г допускала три изогональных преобразования относительно (необходимо коллинеарных) полюсов.

Д. З. Гордевский

1717. Заметка о формуле для жанра плоской кривой. Норткотт (A note on the genus formula for plane curves. Northcott D. G.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 3, 376—382 (англ.)

Исходя из развернутой им теории локальных колец (РЖМат, 1956, 5749), автор показывает, что формула для жанра неприводимой плоской кривой C n-го порядка может быть записана в виде $p = (n-1)(n-2)/2 - \frac{1}{2}\sum\Delta(P/C)$, где сумма распространена на все кратные точки P кривой C, а $\Delta(P/C)$ — числа, определенные единственным образом структурами локальных колец точек P. Тем самым устраняется теоретическая неопределенность, возникающая при написании второго члена этой формулы в виде $\frac{1}{2}\sum r_i(r_i-1)$, где сумма распространена на все кратные точки кривой, включая бесконечно близкие. Ср. по этому поводу Van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939, Kap. 9.

В. В. Морозов

1718. О циркулярных кривых четвертого порядка с кратной точкой в центре. Чуб А. Т., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 171—188

Рассматривается задача о конструировании циркулярных кривых четвертого порядка с двойной точкой в центре и с действительными асимптотическими направлениями. Уравнение такой кривой имеет вид:

$$(Ax^2 + Bxy + Ey^2)(x^2 + y^2) + Fx^2 + Gxy + Hy^2 = 0$$

при условии $B^2 - 4AE \geqslant 0$.

Автор устанавливает соответствие между циркулярными кривыми 4-го порядка и кривыми 2-го порядка с помощью одно- четырехзначного рационального преобразования, определяемого равенствами

$$x' = \frac{x}{(ax+y)(x^2+y^2)}; \quad y' = \frac{y}{(ax+y)(x^2+y^2)}.$$

Действительно, если кривую 2-го порядка $ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + dx' + ey' = 0$ подвергнуть этому преобразованию, то она переходит в циркулярную кривую 4-го порядка. Пользуясь этим, можно строить точки циркулярной центральной кривой 4-го порядка по данным точкам конического сечения, проходящего через начало координат. Одной и той же кривой 4-го порядка будут соответствовать две различных кривых 2-го порядка, уравнения которых отличаются друг от друга коэффициентом при x. Однако обе эти кривые будут одного и того же вида (эллипс, гипербола или парабола). Это позволяет дать классификацию циркулярных кривых 4-го порядка, аналогичную классификации кривых 2-го порядка, присвоив им название эллиптических кривых, гиперболических или параболических.

Рассматриваются свойства и расположение эллиптических, гиперболических и параболических кривых, исходя из задания базиса конструируемой кривой (эллипса, гиперболы или параболы). Н. А. Колмогоров

1719. Об одном особенном бирациональном преобразовании Жонкьера. Ливенс (Sur une transformation birationnelle de Jonquières particulière. Lievens Joseph), Mathesis, 1955, 64, № 6-8, 249—253 (франц.)

Изучается особенный случай бирационального преобразования двух плоскостей, при котором совокупность прямых одной плоскости преобразуется в систему кривых n-го порядка с неподвижными одной n—1-кратной и $2n-2$ простыми точками.

В рассматриваемом случае кривые гомалоидальной сети одной плоскости обладают в кратной точке k общими касательными; на другой — кривые сети имеют в простой точке соприкосновение k — 1-го порядка. Определяются все фундаментальные элементы указанного преобразования.

Г. С. Бархин

1720. Вклад в изучение отображения относительно кривой. Фава (Contributi allo studio della riflessione rispetto ad una curva. Fava Franco), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—54, 13, 225—241 (итал.)

Пусть дана алгебраическая кривая $\overline{C}$ порядка $\overline{n}$ и класса $\overline{m}$ (базисная кривая отображения) и две точки I, J (центры отображения) вне $\overline{C}$; пусть P — произвольная точка; M_i и N_k $(i, k = 1, 2, \ldots, \overline{n})$ — точки пересечения прямых IP и JP с $\overline{C}$; каждая из $\overline{n}^2$ точек $P'_{i,k}$ пересечения прямых M_iJ и N_kI называется обра-

зом точки P в отображении $R(I, J)$ относительно кривой $\overline{C}$. Когда точки I, J суть циклические точки плоскости, определение отображения $R(I, J)$ совпадает с определением, которое дал Каснер для отображения Шварца (см., например, Ann. Math., 1937, 38, 4).

Главный результат статьи представляет теорема: образом алгебраической кривой C порядка n и класса m является алгебраическая кривая C', класс которой в общем случае равен $(2\overline{m}n + m\overline{n})\overline{n}$. При особом расположении кривых C и $\overline{C}$, в частности, когда обе они имеют общую касательную, проходящую через I (или J), эта оценка класса может нарушаться. Если C совпадает с $\overline{C}$, то кривая C' распадается на кривую $\overline{C}$, считаемую некоторое число раз, и остаточную кривую $\overline{S}$ порядка $\overline{n}(\overline{n}-1)^2$, называемую сателлитом. Класс сателлита $\overline{S}$ в общем случае равен $\overline{m}(\overline{n}-1)(3\overline{n}-5)$.

В заключение исследуется вид образа C' прямой или конического сечения C в отображении относительно конического сечения $\overline{C}$ при общем или особых расположениях C. Л. Л. Вербицкий

1721. Эллиптические поверхности с эллиптическим пучком кривых жанра 4. Первая часть. Оржеваль (Surfaces elliptiques avec un faisceau elliptique de courbes de genre 4. Première partie. Orgeval B. de), Publs scient. Univ. Alger, 1954, **A1**, № 2, 313—336 (франц.)

Формула Цейтена для рассматриваемой задачи записывается в виде

$$6 = n(2p_g - 2) + \sum_1^t n(s_i - 1)/s_i, \qquad (1)$$

где $p_g \leqslant 4$, а s_i — делители n. Автор определяет все арифметически возможные решения этого уравнения (их получается 51: 39 для $p_g = 0$; 9 для $p_g = 1$; 2 для $p_g = 2$ и 1 для $p_g = 4$). Затем он отыскивает решения, соответствующие поверхностям, для которых кривые эллиптического пучка — гиперэллиптические. Таких решений получается 19; два из них соответствуют одному и тому же решению уравнения (1). В. В. Морозов

1722. Об одном неравенстве между проективными характерами алгебраической поверхности. Маркьонна (Sopra una disuguaglianza fra i caratteri proiettivi di una superficie algebrica. Marchionna Ermanno), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 478—480 (итал.)

Пусть на поверхности F дан линейный пучок C неприводимых кривых жанра π с n базисными точками и d кривыми жанра $\pi-1$. Показывается, что $d \geqslant n-1$, причем, если имеет место знак равенства, то $\pi = 0$ и поверхность рациональна. Отсюда следует, что если в S_r дана поверхность F без кратных точек при $r > 3$ или с единственной нормальной особенностью (двойная узловая кривая с конечным числом тройных точек) при $r = 3$ и если класс ее меньше порядка, то F — либо плоскость, либо поверхность Веронезе (или ее производящая проекция в S_4 или в S_3). В. В. Морозов

1723. Якобианы линейных систем на алгебраическом многообразии. Монк (Jacobians of linear systems on an algebraic variety. Monk D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 2, 198—201 (англ.)

Решена задача Севери (Ann. Mat. pura ed appl., 1951, (4), **32**, 1—81) о получении общей формулы для якобиана линейных систем гиперповерхностей на алгебраическом многообразии. Для частных случаев формула была доказана ранее Тоддом (Todd J. A., Proc. London Math. Soc., 1939, (2), **45**, 410—420).

Ю. Е. Пензов

1724. Канонические и плюриканонические системы для кратных плоскостей: абелевой порядка p^2 и циклической порядка pq. Гутвирт (Systèmes canoniques et pluricanoniques des plans multiples abéliens d'ordre p^2 et cycliques d'ordre pq. Gutwirth A.), Rend. mat. e applic., 1955, **13**, № 3-4, 440—471 (франц.)

Пусть F — поверхность, инвариантная относительно конечной группы преобразований порядка n, и ω — соответствующая ей n-кратная плоскость. В работе определяются образы в ω слитых плюриканонических систем F для случаев, когда группа G абелева, не циклическая порядка p^2 и циклическая порядка pq, где p и q — различные простые числа. Как примеры рассматриваются канонические и биканонические системы: в частности, для четырехкратной абелевой не циклической плоскости воспроизводятся результаты, найденные ранее Либуа (Libois, Sur une classe de plans quadruples abéliens. Gembloux, 1937). В. В. Морозов

1725. Некоторые проблемы унирациональности. Морин (Alcuni problemi di unirazionalita. Morin Ugo), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 39—53 (итал.)

Обзор некоторых известных результатов и частично решенных задач теории унирациональных алгебраических многообразий: многообразия, содержащие унирациональные системы унирациональных многообразий, унирациональность общей примали V^n_{r-1} в S_r при достаточно большом r, многообразия с рациональными системами рациональных кривых, условие существования односекущих, условие унирациональности V^n_3 в S_4. См. по этому поводу обзор Рота в его книге (Roth L., Algebraic threefolds. Berlin, 1955, стр. 44 и след.). В. В. Морозов

1726. Локальная дилатация. Семпл, Керби (Local dilatation. Semple J. G., Kirby D.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 417—422 (англ.)

Если V_d — неособенное алгебраическое многообразие, M_δ $(0 \leqslant \delta \leqslant d-2)$ — его неприводимое неособенное подмногообразие и если некоторая дилатация с основанием M_δ переводит V_d в V'_d, а M_δ — в подмногообразие M'_{d-1}, причем O и O' — соответствующие точки M_d и M'_{d-1}, то можно выбрать локальные координатные системы $(x_1, \ldots, x_d)$ на V_d в точке O и $(y_1, \ldots, y_d)$ на V'_d в точке O' так, чтобы уравнения дилатации в окрестности пары (O, O') приводились к виду

$x_i = y_i (i = 1, 2, \ldots, \delta, d)$; $x_j = y_j y_d$ $(j = \delta+1, \ldots, d-1)$. Этому утверждению Сегре (РЖМат, 1955, 401) дается алгебраическое доказательство; дилатация осуществляется посредством линейной системы прималей, проходящих через M_δ однократно. В. В. Морозов

1727. Некоторые проблемы рациональности для алгебраических многообразий. Рот (Alcuni problemi di razionalità per le varietà algebriche. Roth Leonard), Rend. Seminar mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 105—114 (итал.)

Рассматриваются вопросы, связанные с невыполнимостью теоремы Кастельнуово с бирациональности плоской инволюции для многообразий высших размерностей. С помощью теории базы Севери (феномен деления на многообразии) дается пример иррациональной инволюции в S_3, показывается существование вполне регулярного, но не унирационального V_3 с нулевыми жанром и плюрижанрами, существование линейной

системы форм, в которой производящий элемент унирационален, но некоторая частная форма не унирациональна, хотя имеет нулевые жанр и плюрижанры и т. д. Результаты эти вошли в книгу автора: Algebraic Threefolds, Berlin, Springer, 1955 (стр. 96—98).

В. В. Морозов

1728. Примечание к примечанию А. Вейля. Готье (Footnote to a footnote of André Weil. Gauthier Luc), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 325—328 (англ.)

Опираясь на свои прежние результаты (Bull. soc. roy. sci. Liège, 1944, **13**, 191—195), автор указывает решение поставленного А. Вейлем (в связи с его статьей: РЖМат, 1955, 2544) вопроса о влиянии кривой (A): $y^2 = \varphi(x, 1) = \det|xF + G|$ на геометрию пересечения V квадратичных многообразий $F = 0$, $G = 0$ в S_n. В случае поля комплексных чисел и если многообразия $uF + vG = 0$ не имеют общих двойных точек, V бирационально эквивалентно S_{n-1}; бирациональность нарушается в отдельных точках при $n = 2k$ и на кривой, бирационально эквивалентной (A) при $n = 2k + 1$.

Для случая произвольного поля и $n = 2k + 1$ указана (без доказательства) связь V с якобиевым многообразием кривой $y^2 = (-1)^{k-1}\varphi(x, 1)$.

В. В. Морозов

1729. К теории алгебраических многообразий. Шеваллей (Sur la théorie des variétés algébriques. Chevalley C.), Nagoya. Math. J., 1955, **8**, February, 1—43 (франц.)

Вводится новое определение абстрактного алгебраического многообразия, эквивалентное определению А. Вейля (Weyl A. Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. public, 1946, Ch. VII) и отличающееся от него своим инвариантным характером и выдержанной классической концепцией многообразия как множества своих точек.

Пусть $\mathfrak{R}$ — расширение конечного типа поля Ω. Аффинным кольцом $\mathfrak{R}$ называется его подкольцо вида $\Omega[x_1, \ldots, x_n]$ (где $x_i \in \mathfrak{R}$), допускающее Ω как поле отношений. Максимальному идеалу $\mathfrak{p}$ аффинного кольца $\mathfrak{B}$ соответствует локальное кольцо, состоящее из элементов вида f/g, $f, g \in \mathfrak{B}$, $g \notin \mathfrak{p}$; множество таких локальных колец для заданного аффинного кольца $\mathfrak{B}$ образует аффинную модель $M(\mathfrak{B})$. Назовем вообще локалитетом подкольцо $\mathfrak{R}$, являющееся локальным кольцом максимального идеала некоторого аффинного кольца. Будем говорить, что локалитеты $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}'$ соответствуют друг другу, если идеал, порожденный их максимальными идеалами $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ в кольце, порожденном $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}'$, не содержит 1. Непустое множество M локалитетов называется моделью (поля $\mathfrak{R}$), если а) различные локалитеты из M не соответствуют друг другу, б) M является конечным объединением аффинных моделей. Модели M и M' (двух расширений $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$) считаются изоморфными, если существует Ω-изоморфизм J $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}'$ такой, что образами локалитетов M являются все локалитеты M'.

В применении к абстрактному многообразию Вейля V $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(V)$ обозначает множество функций на V со значениями в «универсальной области» Ω. Каждой точке P соответствует локальное кольцо функций, определенных в этой точке и принимающих в ней конечные значения. Совокупность этих локальных колец образует модель поля функций. В первой главе работы показывается, что изоморфизм моделей является необходимым и достаточным условием для наличия бирационального и всюду бирегулярного соответствия между двумя многообразиями.

Структуру алгебраического многообразия на множестве E при фиксированной универсальной области Ω автор определяет заданием множества $\mathfrak{R}$ отображений частей E в Ω с выполнением следующих условий: 1) Если $f, g \in \mathfrak{R}$, то существуют (и единственны) $f + g \in \mathfrak{R}$, $fg \in \mathfrak{R}$, определенные, во всяком случае, в любой точке P, где определены и f, и g; 2) Относительно операций сложения и умножения $\mathfrak{R}$ является полем; 3) Ω вкладывается в $\mathfrak{R}$ как поле констант; 4) Пусть $\mathfrak{o}(P)$ — множество таких $f \in \mathfrak{R}$, область определения которых содержит данную точку P, отображение $P \to \mathfrak{o}(P)$ является взаимно однозначным отображением E на некоторую модель $M(E)$ поля $\mathfrak{R}$.

В множестве E вводится топология с помощью областей определения функций f (топология Зарисского — всякое непустое семейство открытых множеств допускает максимальный элемент). Определяется понятие неприводимой части E и показывается возможность и единственность разложения произвольной части E на неприводимые. Подмногообразием E называется такая его неприводимая часть A, которая открыта в своем замыкании (структура многообразия на A индуцируется в этом случае структурой многообразия E); в отличие от А. Вейля подмногообразие не предполагается замкнутым в E.

Определяется произведение двух многообразий $E \times F$, а затем — понятие неприводимого соответствия между E и F. Такие соответствия описываются с помощью составных (composée) расширений полей функций $\mathfrak{R}(E)$ и $\mathfrak{R}(F)$.

Вводится понятие конструктивной части E как множества, которое можно представить в виде объединения конечного числа подмногообразий E. Пересечение, объединение, неприводимые компоненты конструктивных частей E являются конструктивными. Доказывается, что прообраз конструктивного множества при неприводимом соответствии также конструктивен.

Наконец, определяется понятие K-многообразия, т. е. многообразия относительно поля $K \subset \Omega$, и понятие общей точки относительно K.

И. З. Розенкноп

1730. Не собственно абелевы многообразия. Рот (Improperly abelian varieties. Roth Leonard), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 277—289 (англ.)

В работе продолжается изучение псевдоабелевых многообразий (м.) (РЖМат, 1955, 3377) и обобщаются на случай м. высших размерностей результаты, ранее найденные автором для трехмерников (Rend. mat., 1953, **12**, 387). Несобственно абелевым м. автор называет абелево м. W_p, допускающее параметрическое представление посредством абелевых функций жанра, меньшего чем p. Показывается, что если абелево м. W_p имеет поверхностную иррегулярность q $(0 < q < p)$ и некоторые его плюрижанры больше нуля, то оно — псевдоабелево, точнее: допускает параметрическое представление посредством алгебраических функций от абелевых функций жанров q и $p - q$, причем в зависимости от характера м. возможно и дальнейшее снижение жанров требующихся для его представления функций. Отсюда следует, что классификация всех несобственно абелевых м. W_p является рекурсивным процессом и требует определения всех W_r при $r < p$, представляющих инволюции, порожденные конечными группами автоморфизмов на пикаровом м. V_r. В заключение вводится понятие пара-абелевых м. и указываются некоторые их свойства, в последующем развитые автором в специальной статье (РЖМат, 1956, 4860).

В. В. Морозов

1731 Д. К теории алгебраических поверхностей. Голдман (On the theorie of algebraic surfaces. Goldman Oscar.—Doct. diss. Princeton Univ., 1948), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 599 (англ.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1732. О радиусе кривизны в вершинах кривой. Ферла (Sul raggio di curvatura nei vertici di una curva. Ferla Ambrogio), Period. mat., 1955, **33**, № 3, 161—166 (итал.)

Радиус кривизны кривой $f(x, y^2) = 0$ в точке пересечения с осью x дается формулой $\rho = \frac{\partial f}{\partial x} \Big/ 2\frac{\partial f}{\partial (y^2)}$.

Г. К. Энгелис

1733. Эквиангармоническая кривая 3-го порядка, связанная с тройкой E_1. Манара (Cubica equianarmonica legata ad una terna di E_1. Manara Carlo Felice), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 353—359 (итал.)

Исследование связано с прежней работой автора (Boll. Unione mat. ital., 1941, 2 ser., **3**, 320—325) о характеристике пространственной кривой W с помощью проективных инвариантов тройки ее дифференциальных элементов 1-го порядка и с работой Буцано (Buzano, там же, 201—207).

В плоскости π берутся три точки A, B, C и три прямых a, b, c, проходящих соответственно через A, B, C; треугольник ABC и трехсторонник abc предполагаются невырожденными и через каждую вершину первого проходит одна сторона второго. Пусть A', B', C'— соответственно точки пересечения прямой a со стороной BC, b с CA и т. д. Известно, что произведение простых отношений

$$K = (ABC')\,(BCA')\,(CAB')$$

есть проективный инвариант данной конфигурации троек E_1; если $K = +1$, то тройка элементов (a, A), (b, B), (c, C) принадлежит одному коническому сечению, если $K = -1$, то a, b, c принадлежат пучку (этот случай дальше исключается). Автор доказывает, что существует эквиангармоническая кривая 3-го порядка Φ, рационально определяемая конфигурацией тройки E_1: (a, A), (b, B), (c, C).

Рассматривается трехпараметрическая линейная система Σ кривых 3-го порядка, содержащих тройку элементов E_1 и, следовательно, связанных с заданным K. Если для каждой из точек A, B, C задать соответственные отношения кривизны кривой Φ и кривой из системы Σ, именно отношения I_a, I_b, I_c (инварианты Мемке — Сегре), то четырьмя инвариантами K, I_a, I_b, I_c определится вообще единственная кривая системы Σ; автор ставит вопрос о выборе таких инвариантов Мемке — Сегре, чтобы они давали из системы Σ не одну, а целый пучок указанных кривых. Если такие специальные значения I_a, I_b, I_c (зависящие от одного произвольного параметра) считать за декартовы координаты точки трехмерного пространства, то совокупность этих троек определит пространственную кривую 3-го порядка.

С. С. Бюшгенс

1734. О некотором свойстве пространственных кривых. Збрана (Su alcune proprietà delle curve sghembe. Sbrana Francesco), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 263—265 (итал.)

С некоторой точкой P кривой L связывается сопровождающий трехгранник $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Кривизна и кручение обозначаются соответственно через $C(P)$ и $T(P)$. Все функции предполагаются достаточно гладкими.

1. Рассматривается вектор

$$\mathbf{w} = \sin\varphi\,\mathbf{t} + \cos\varphi\,\mathbf{n}.$$

Требование, чтобы вектор $\frac{d\mathbf{w}}{ds}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{b}$, приводит к соотношению

$$C = \frac{d\varphi}{ds}. \qquad (1)$$

В этом случае L можно рассматривать как асимптотическую линию некоторой поверхности.

2. Рассматривая вектор

$$\mathbf{N} = \cos\theta\cdot\mathbf{n} + \sin\theta\cdot\mathbf{b}$$

и требуя, чтобы $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \parallel \mathbf{t}$, приходят к соотношению

$$T = \frac{d\theta}{ds}. \qquad (2)$$

Если L есть линия кривизны некоторой поверхности, то соотношение (2) выполняется всюду вдоль L.

3. Наконец, рассматривается вектор

$$\mathbf{V} = \cos\psi\cdot\mathbf{b} + \sin\psi\cdot\mathbf{t}.$$

Для того чтобы $\frac{d\mathbf{V}}{ds}$ был параллелен $\mathbf{n}$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi \equiv \text{const}$. В этом случае L можно рассматривать как геодезическую линию некоторой поверхности.

И. Н. Григорьев

1735. Поверхности второго порядка как поверхности, образованные движением. Браунер (Quadriken als Bewegflächen. Brauner Heinrich), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 1, 45—63 (нем.)

Известно, что из ∞^3 конических сечений, лежащих на данной поверхности 2-го порядка Ω, каждые ∞^1 конгруэнтны друг другу. Поэтому можно каждое такое коническое сечение непрерывно передвигать по поверхности. Это — возможное ∞^2 способами — образование поверхности Ω как поверхности движения постоянного конического сечения исследовалось в конце прошлого и начале нынешнего века в ряде работ (Гамбье, Кревер, Людвиг, Болиф). Обобщая эти исследования, автор показывает, что поверхность Ω может быть образована движением некоторой поверхности 2-го порядка Φ, рассматриваемой как твердое тело. При этом каждая поверхность Ω может быть образована ∞^3 способами как огибающая ∞^2 положений твердой поверхности Φ, которая в каждом своем положении касается Ω вдоль некоторого конического сечения. В получающейся таким образом системе ∞^4 поверхностей Φ можно выделить подсистемы, содержащие по ∞^2 подобных и по ∞^3 равнообъемных поверхностей, касающихся вдоль конических сечений той же поверхности Ω.

В работе отдельно рассматриваются случаи центральных и нецентральных поверхностей 2-го порядка.

В. Ф. Рогаченко

1736. Небольшая задача из теории поверхностей. Фог (Et lille problem fra fladeteorien. Fog David), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 4, 157-158 (дат.)

Приводятся примеры поверхностей

1) $z = y^2 - 2x^2y + 3x^4/4$, 2) $z = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5$,

у которых для каждого нормального сечения поверхности в начале координат аппликата имеет в этой точке минимум, а аппликата в уравнении поверхности не имеет минимума.

К. С. Сцилард

1737. О парах поверхностей, которые в соответствующих точках имеют пару общих полярно сопряженных прямых. Лактанова Н. В., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 95—108

Две поверхности S_1 и S_2 имеют общую пару полярно сопряженных прямых в соответствующих точках M и N, если прямой MN полярно сопряжена одна и та же прямая L как относительно квадрик Дарбу поверхности S_1 в точке M, так и относительно квадрик Дарбу поверхности S_2 в точке N.

Автор устанавливает существование поверхностей S_1 и S_2 с произволом одной функции двух аргументов, имеющих общую пару полярно сопряженных прямых. Далее показывается, что к произвольно данной поверхности S_1 можно присоединить поверхность S_2 с произволом двух функций одного аргумента, которая имеет с поверхностью S_1 общую пару полярно сопряженных прямых.

Полученные общие уравнения применяются к решению некоторых частных задач. Н. И. Алексеев

1738. Конформное отображение, устанавливаемое на паре поверхностей лучами конгруэнции. Фролов А. С., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 323—333

Автор устанавливает существование конгруэнции с четырьмя произвольными функциями одного аргумента, лучи которой преобразуют конформно одну фокальную поверхность в другую. Далее доказывается существование нормальной конгруэнции с двумя произвольными функциями одного аргумента, которая имеет пару поверхностей, конформно преобразующихся одна в другую. Средние кривизны этих поверхностей постоянны и равны по модулю, но противоположны по знаку. Н. И. Алексеев

1739. Об одной конгруэнции W, принадлежащей линейному комплексу. Маркус (Sur une congruence W appartenant à un complexe linéaire. Marcus F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**; № 8, 837—838 (франц.)

Методом, отличным от того, который применил Годо, доказывается, что конгруэнция, рассмотренная последним, принадлежит линейному комплексу.

Резюме автора

1740. О гомографии, связанной с конгруэнцией W. Годо (Sur une homographie associée à une congruence W. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 9, 870—874 (франц.)

Пусть (j) — конгруэнция W с фокальными поверхностями (x) и $(\bar{x})$, отнесенная к асимптотическим u, v фокальных поверхностей. Строятся четыре последовательности Лапласа в пространстве пяти измерений S_5 с фундаментальной гиперквадрикой Ли Q, отображающей своими точками прямые трехмерного пространства:

$$1)\ \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

— связана с поверхностью $(\bar{x})$. Точки U, V отображают асимптотические касательные к поверхности (x): xx^{10}, xx^{01} в точке x;

$$2)\ \ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots \qquad (\bar{L})$$

— связана с поверхностью $(\bar{x})$ подобным же образом;

$$3)\ \ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots J_{-n}, \ldots, \qquad (\mathscr{J})$$

точка J — отображение на Q прямой j:

$$4)\ \ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots, \qquad (\mathscr{P})$$

точка P — отображение в S_5 линейного комплекса, соприкасающегося с конгруэнцией (j) вдоль луча j. Во всех четырех последовательностях каждая точка — преобразование предыдущей в направлении линии u. Последовательности L и $\bar{L}$ автополярны, а $\mathscr{J}$ и $\mathscr{P}$ сопряжены относительно Q; P_n — пересечение прямых $U_n\bar{U}_n$ и $U_{n-1}\bar{U}_{n-1}$, а P_{-n}—прямых $V_n\bar{V}_n$ и $V_{n-1}\bar{V}_{n-1}$.

Плоскости JJ_1J_2 и $PP_{-1}P_{-2}$ сопряжены по отношению Q. Линии их пересечения с Q отображают две системы прямолинейных образующих одной и той же квадрики Ψ_0 в трехмерном пространстве. Сечения Q сопряженными плоскостями $JJ_{-1}J_{-2}$ и PP_1P_2 отображают две образующие прямолинейные системы квадрики Ψ_{-0} (Фиников С. П., Теория конгруэнций. Изд.-во техн.-теор. лит., М.—Л., 1950, 7. IV, 158; Godeaux L., Actualités scientifiques, Paris, Hermann, 1934, № 138, 36).

Автор рассматривает поляритет θ_0 по отношению Ψ_0. поляритет θ_{-0} относительно Ψ_{-0} и гомографию $H=\theta_0\theta_{-0}$. В S_5 им соответствуют коллинеации θ_0', θ_{-0}' и $H'=\theta_0'\theta_{-0}'$

Трехмерное пространство U_1UVV_1 переходит в себя при каждой из коллинеаций θ_0' и θ_{-0}'. Пространство U_1UVV_1 пересекает Q по двум плоскостям: одна отображает связку прямых с центром в точке x, другая — совокупность прямых в плоскости $xx^{10}x^{01}$, касательной к поверхности (x) в ее точке x. Эти плоскости, переставляясь между собой при коллинеациях θ_0' и θ_{-0}', оказываются двойными элементами гомографии H'.

Трехмерное пространство $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1$ сечет Q по плоскостям — отображениями связки прямых с центром $\bar{x}$ и совокупности прямых плоскости $\bar{x}\bar{x}^{10}\bar{x}^{01}$, касательной к $(\bar{x})$ в $\bar{x}$ с аналогичным свойством.

Отсюда и получается, что в гомографии H фокусы и фокальные плоскости луча j являются двойными элементами. При гомографии H остаются еще двойными две прямые g_1, g_2, проходящие через фокусы.

В заключение, пользуясь тетраэдром Э. Картана с вершиной x и гранью $xx^{10}x^{01}$, автор определяет аналитически Ψ_0, Ψ_{-0}, H с ее характеристическим уравнением, x, $\bar{x}$, $\bar{x}\bar{x}^{10}\bar{x}^{01}$, g_1, g_2. [К. Н. Тихоцкий

1741. Соответствие некоторых линий на фокальных поверхностях прямолинейной конгруэнции. Кришна (Correspondence of certain curves on the focal surfaces of a rectilinear congruence. Krishna Shri), Istanbul üniv. fen. fak., 1954, **A19**, № 2, 69—78 (англ.; рез. турец.)

Получены следующие результаты:

1. Если на фокальных поверхностях прямолинейной конгруэнции соответствуют линии нулевой длины, то: или 1) конгруэнция не допускает изображения на действительной сфере, или 2) если конгруэнция допускает изображение на действительной сфере, то параметрические линии, образующие ортогональную систему на сферическом изображении, имеют одинаковые геодезические кривизны.

II. Характеристические линии на фокальной поверхности определяются уравнением

$$[d_{11}(g_{22}d_{11}-g_{11}d_{22})-2d_{12}(g_{12}d_{11}-g_{11}d_{12})](du^1)^2+$$
$$+2[d_{12}(g_{22}d_{12}+g_{11}d_{22})-2g_{12}d_{11}d_{22}]du^1du^2+$$
$$+2[d_{12}(g_{22}d_{12}-g_{12}d_{22})-d_{22}(g_{22}d_{11}-g_{11}d_{22})](du^2)^2=0,$$

где g_{ij} и d_{ij} — коэффициенты квадратичных форм.

Доказаны следующие теоремы:

Если характеристические линии на фокальных поверхностях прямолинейной конгруэнции соответствуют, то асимптотические линии и линии кривизны на этих поверхностях тоже соответствуют. Обратно: Если линии кривизны на фокальных поверхностях конгруэнции соответствуют, асимптотические линии и характеристические линии также соответствуют.

III. Когда характеристические линии на фокальных поверхностях прямолинейной конгруэнции соответствуют и фокальное расстояние есть величина постоянная, то обе фокальные поверхности будут псевдосферическими. Это свойство характеризует псевдосферическую конгруэнцию. И. Н. Григорьев

1742. Равноотстоящие плоские семейства линий на линейчатых поверхностях. Рыбаков В. Н.,

Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, 35, 159—166

Линии $u=\text{const}$ на поверхности $\bar{M}=\bar{R}(v)+u\bar{l}(v)$ называются равноотстоящими. Доказаны две теоремы: 1. Если у линейчатой поверхности, с прямым круговым образующим конусом, направляющая кривая плоская и линейная комбинация координат векторов $\bar{R}$ и $\bar{l}$ постоянна, то $u=\text{const}$ есть семейство плоских кривых. 2. Если направляющая линейчатой поверхности плоская, а образующая наклонена к плоскости направляющей под постоянным углом, то линии $u=\text{const}$ суть плоские линии, лежащие в параллельных плоскостях. Н. И. Алексеев

1743. Кватернионное обоснование вещественной линейчатой геометрии. Пимия (Die quaternionische Begründung der reellen Liniengeometrie. Pimiä Lauri), Comment. phys.-math., 1955, **17**, № 10, 20 S. (нем.)

С каждой прямой q пространства, заданной нормальными координатами q_i $(i=1,2,\ldots,6)$, удовлетворяющими уравнению

$$q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6=0,$$

сопоставляется гиперболический кватернион

$$X=tX_1\bar{X}_2=\xi_0+\xi_1e_1+\xi_2e_2+\xi_3e_3,$$

где e_i — единицы, подчиненные правилам умножения:

$$e_1^2=e_2^2=e_3^2=1;\quad -e_2e_3=e_3e_2=e_1;\quad -e_3e_1=e_1e_3=e_2;$$

$$e_1e_2=-e_2e_1=e_3;\ \text{а}\ X_1=x_{10}+x_{11}e_1+x_{12}e_2+x_{13}e_3;$$

$$\bar{X}_2=x_{20}-x_{21}e_1-x_{22}e_2-x_{23}e_3,$$

причем $q_1=x_{10}^2-x_{11}^2-x_{12}^2-x_{13}^2$; $q_4=x_{20}^2-x_{21}^2-x_{22}^2-x_{23}^2$; $q_k=\xi_{k-1}+\xi_{k-2}$. $[k=2,3,5,6]$.

Кватернионы X_1 и X_2 рассматриваются как правосторонние однородные координаты прямой q; наряду с X_i вводятся левосторонние координаты $\overset{*}{X}_i$, определяемые уравнением $\Gamma(\overset{*}{X},X)=\overset{*}{X}_1X_2-\overset{*}{X}_2X_1=0$. Мы пишем $q=(X_1,X_2)=(\overset{*}{X}_1,\overset{*}{X}_2)$. Вводятся кватернионные функции:

$$N(X_1)=x_{10}^2-x_{11}^2-x_{12}^2+x_{13}^2;$$

$$S(X_1)=x_{10};\quad \nabla(q,p)=\begin{Vmatrix}X_1Y_1\\X_2Y_2\end{Vmatrix}=$$

$$=N(X_1)N(Y_2)+N(X_2)\cdot N(Y_1)-2S(X_1\bar{X}_2Y_2\bar{Y}_1),$$

где $q=(X_1,X_2)$; $p=(Y_1,Y_2)$.

Уравнение $\nabla(q,p)=0$ выражает условие пересечения прямых q и p. Функция $\Gamma(\overset{*}{q},p)=\overset{*}{X}_1Y_2-\overset{*}{X}_2Y_1$ называется гамма-функцией.

Эти понятия применяются к изучению одномерных, двумерных и трехмерных линейных семейств прямых. Одномерное линейное семейство, производимое прямыми $p=(A_1,A_2)$ и $q=(B_1,B_2)$, состоит из всех прямых $\rho=(X_1,X_2)$, для которых $X_iR=t_1A_i+t_2B_i$, где R — произвольный кватернион, а t_1 и t_2 — произвольные скаляры. Прямые p, q и $r=(A_1+B_1,A_2+B_2)$ называются основными прямыми семейства. Прямые, пересекающие все прямые данного одномерного линейного семейства, производимого прямыми $p=(A_1,A_2)$ и $q=(B_1,B_2)$, образуют сопряженное линейное семейство, производимое прямыми $p_1=(C_1,C_2)$ и $q_1=(D_1,D_2)$, причем доказывается, что

$$C_i=A_i(1+e_1+e_2+e_3)+B_i(1+e_1-e_2-e_3);$$

$$D_i=A_i(1-e_1+e_2-e_3)+B_i(-1+e_1+e_2+e_3).$$

В качестве линейных образов второй ступени рассматриваются эллиптические и гиперболические пучки одномерных линейных семейств прямых. Доказывается, что любая прямая, пересекающая какие-нибудь три прямые данного пучка одномерных линейных семейств, принадлежит одному из этих семейств.

Кватернионные координаты и функции дают возможность сильно упростить доказательства.

Аналогично исследуются в качестве линейных образов третьей ступени линейные комплексы прямых и связки одномерных линейных семейств прямых. Большую роль играет двойное отношение четырех прямых p,q,r,s:

$$D(\overset{*}{p},\overset{*}{q};r,s)=\frac{\Gamma(\overset{*}{p},r)\,\overline{\Gamma(\overset{*}{q},r)}\,\Gamma(\overset{*}{q},s)\,\overline{\Gamma(\overset{*}{p},s)}}{N[\Gamma(\overset{*}{p},s)]\,N[\Gamma(\overset{*}{q},r)]}.$$

Ю. Л. Рабинович

1744. Дифференцируемые точки дуги в конформном 3-пространстве. Лейн, Шерк (Differentiable points of arcs in conformal 3-space. Lane N. D., Sherk F. A.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 1, 105—118 (англ.)

Продолжение предшествующей статьи тех же авторов, посвященной дифференцируемым точкам дуг в конформной плоскости (РЖМат, 1954, 4172). В работе определяются один раз дифференцируемые, дважды дифференцируемые и трижды дифференцируемые (просто «дифференцируемые», по терминологии авторов) точки кривой трехмерного конформного пространства как точки, в которых существуют касательные окружности (циклы), соприкасающаяся окружность и соприкасающаяся сфера; анализируется взаимоотношение разных возможных определений (связанных с соприкасающимися окружностями и сферами). Далее строится классификация дифференцируемых точек дуги трехмерного конформного пространства, связанная с тем, пересекают или не пересекают эту дугу касательные и соприкасающиеся сферы (аналогично классификации точек кривой n-мерного евклидова пространства в зависимости от того, пересекают или не пересекают кривую касательные и соприкасающиеся гиперплоскости — в двумерном случае это приводит к выделению точек перегиба и возврата); указывается, что всего может существовать 32 типа точек. Аналитические критерии принадлежности точки кривой к тому или иному типу в работе отсутствуют. И. М. Яглом

1745. Внутренние уравнения некоторых поверхностей в эквицентроаффинном пространстве. Каменский Н. П., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, **21**, 85—103

В. В. Вагнер (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1948, 6, 269 — 276) показал, пользуясь ковариантным дифференцированием, что заданием трех геометрических объектов: плотности W веса 3, объекта аффинной связности γ и объекта проективной связности P — кривая $\bar{r}=\bar{r}(u)$ определяется в X_3 (до центроаффинного преобразования). Радиус-вектор кривой $\bar{r}=\bar{r}(u)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению третьего порядка. В реферируемой статье автор отказывается от ковариантного дифференцирования.

Принимая центр O центроаффинного пространства за начало координат, автор вводит для произвольной кривой $\bar{r}=\bar{r}(u)$ натуральный параметр s условием $\bar{r}\,\bar{r}'\bar{r}''=1$, $(\bar{r}^1=d\bar{r}/ds)$, $s=\int_{u_1}^{u_2}(\bar{r}\,\bar{r}'\,\bar{r}'')^{1/3}\,du$ и две кривизны

$k(s)=\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''$, $t(s)=-\bar{r}\,\bar{r}''\bar{r}'''$. С помощью «формул Френе» $d\bar{r}/ds=\bar{r}'$, $d\bar{r}'/ds=\bar{r}''$, $d\bar{r}''/ds=k\bar{r}+t\bar{r}'$ доказывается при заданных непрерывными функциями кривизнах существование единственной кривой $\bar{r}=\bar{r}(s)$ (до эквицентроаффинного преобразования).

Кривизны всякой кривой на данной поверхности удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению пятого порядка относительно k и t (внутреннее уравнение поверхности $f(\bar{r})=0$). Формулы применяются к уравнению плоскости, конуса второго порядка, эллиптического и гиперболического цилиндров с осью, проходящей через центр пространства и некоторой центральной квадрики, центр которой совпадает с центром пространства. Н. М. Писарева

1746 К. Элементарная дифференциальная геометрия. **Хак** (Elementare Differentialgeometrie. Haack Wolfgang. Basel-Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1955, 239 S., ill., 22 DM) (нем.)

Несмотря на скромное название, реферируемая книга полностью обнимает содержание университетских программ (кроме теории плоских кривых). Включен материал, позволяющий использовать эту книгу в качестве теоретического руководства для геодезистов и картографов (отображение поверхностей друг на друга). В специальную главу (гл. 8) выделена теория минимальных поверхностей, где даются первоначальные сведения из вариационного исчисления, приводятся традиционные примеры минимальных поверхностей, связь минимальных поверхностей с общими поверхностями переноса; даются краткие исторические справки.

Наряду с классической теорией двух квадратичных форм поверхности, ряд вопросов теории поверхностей рассматривается с помощью метода внешних форм Картана (гл. 9). Видное место занимают классические вопросы математического анализа, облеченные в геометрическую форму (первая и вторая краевые задачи для уравнения Бельтрами, относящиеся к распространению тепла на поверхности, логарифмический потенциал, функция и формула Грина и т. д.). Здесь же излагаются вопросы внутренней геометрии поверхностей.

Последняя, гл. 10, посвящена доказательству основной теоремы теории поверхностей в той форме, какую она принимает в теории внешних форм Картана, а также вопросам реализуемости данной метрики и изгибании поверхностей. Последний параграф посвящен вопросу о неизгибаемости выпуклых поверхностей. Автор ограничивается доказательством теоремы Герглотца и ссылкой на результаты Рембса, не упоминая работ А. Д. Александрова или А. В. Погорелова.

Везде, где это возможно, автор обходится без применения теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ограничиваясь простейшими итерационными процессами (определение пространственной кривой натуральными уравнениями, теорема о реализуемости данной метрики). Полиграфически книга безупречна.

Библ. 70 назв. Объединенный именной и предметный указатель. Н. И. Кованцов

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1747. О трехчленных соотношениях между грассмановыми координатами. **Бассотти** (Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Bassotti Lucilla), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 2, 200—204 (итал.)

Рассматривается грассманово многообразие $G(n,k)$, соответствующее подпространству S_k проективного пространства S_n $(1<k<n-2)$. Если из множества квадратичных соотношений между грассмановыми координатами, определяющих $G(n,k)$, выбрать подмножество трехчленных соотношений, то получится алгебраическое многообразие $F(n,k)\supset G(n,k)$.

В случае $k=2$ указывается процесс получения всех неприводимых компонент многообразия $F(n,2)$, причем максимальную размерность имеет компонента $G(n,2)$, а остальные имеют размерность по крайней мере на 8 единиц меньше. Общее число компонент ν_n удовлетворяет соотношению

$$n=\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n-5}C_{n+1}^{h+3}\nu_{h+2}\nu_{n-h+3}+1.$$

В случае $k\geqslant 3$ выясняется, что для каждого $n\geqslant k(k+2)$ существуют компоненты многообразия $F(n,k)$, размерность которых выше, чем размерность $G(n,k)$. Доказательства будут даны в следующей заметке.

Р. Н. Щербаков

1748. Параллельные многообразия уровня. **Катков Г. Ф.**, Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, вып. 5, 17—23

На нормалях гиперповерхности $\varphi(u^1,\ldots,u^n)=\text{const}$ евклидова пространства E_n (u^i — общие криволинейные координаты) откладываются постоянные отрезки. Для полученной параллельной гиперповерхности подсчитываются 2 дифференциальных инварианта второго порядка (произведение и сумма главных кривизн); они выражаются через такие же инварианты исходной гиперповерхности. Использованы результаты предыдущих работ автора (Тр. Одесск. ун-та, 1950, 6; Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1949, 1, вып. 2). Есть опечатки в знаках. А. П. Широков

1749. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. **Рыжков В. В.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 180—181

Доклад на заседании Московского математического общества 10 февраля — 3 апреля 1956 г.

1750. О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве. **Гринцевич К. И.**, Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 187—189

Краткое содержание доклада на заседании Московского математического общества 17 мая 1955 г. С помощью внешних форм Картана изучается гиперкомплекс (пятипараметрическое семейство) прямых в четырехмерном проективном пространстве. Исходя из дифференциальных уравнений комплекса, автор строит ряд инвариантных форм, с помощью которых дает геометрическую интерпретацию центров, центральных гиперплоскостей, гиперповерхностей третьего и четвертого порядков. Доказательств не приводится.

И. Я. Бакельман

1751. Об одном классе поверхностей с локально сферической индикатрисой нормальной кривизны в пятимерном пространстве. **Свобода** (Sur une classe de surfaces à l'indicatrice de courbure normale localement sphérique dans un espace à cinq dimensions. Svoboda Karel), Práce Brněnské základ. Českosl. akad. věd. 1955, **27**, № 8, 373—392 (франц.; рез. чеш., русс.)

В пространстве S_5 постоянной кривизны c изучаются двумерные поверхности, обладающие в каждой точке индикатрисой нормальной кривизны в виде окружности ненулевого радиуса, получаемой сечением сферы нормального подпространства S_3 с центром в этой точке

поверхности плоскостью того же S_3 на расстоянии $v = \text{const} \neq 0$ от точки поверхности. В общем случае произвол таких поверхностей зависит от двух функций одного аргумента (при постоянном радиусе индикатрисы произвол параметрический).

Для каждой поверхности однозначно определяется точка E_3 такая, что связка прямых в S_5 с центром в E_3 образует пространство T_4 кривизны v^2+c. Если $v^2+c \neq 0$ (поверхность неевклидова типа), то S_5 может быть как неевклидовым ($c \neq 0$), так и евклидовым ($c=0$); если $v^2+c=0$ (поверхность евклидова типа), то пространство S_5 только неевклидово.

Поверхность неевклидова типа в неевклидовом пространстве S_5 лежит на гиперквадрике M, принадлежащей пучку гиперквадрик с базисом из абсолюта пространства S_5 и дважды взятой полярной гиперплоскости R точки E_3 относительно абсолюта, и образована точками пересечения пар образующих плоскостей гиперквадрики M, которые проходят через касательные пары кривых, лежащих на M и R. Аналогичная конструкция находится и в других случаях. В. Т. Базылев

1752. Конгруэнции геодезических и линейчатые поверхности трехмерного риманова пространства. Б р и т а н (Конгруенції геодезичних і лінійчасті поверхні тримірного ріманового простору. Б р и т а н Б. У.), Наук. зап. Черкаськ. держ. пед. ін-ту, 1954, 5, 39—51 (укр.)

Однопараметрическое или двупараметрическое множество геодезических линий трехмерного риманова пространства R_3 называется соответственно линейчатой поверхностью с геодезическими образующими или конгруэнцией геодезических. Развертывающейся называется поверхность, гауссова кривизна которой равна кривизне пространства в направлении двумерного пучка векторов, касательных к поверхности в данной ее точке.

Доказывается, что поверхность, содержащая однопараметрическую совокупность кривых, вдоль которых ее нормали образуют поле параллельно направленных векторов, является развертывающейся, а кривые совокупности — геодезическими линиями пространства. Обратно, всякая развертывающаяся поверхность является линейчатой поверхностью, нормали которой вдоль ее образующих составляют поле параллельно направленных векторов.

Дается интегральное выражение угла поворота нормали к линейчатой поверхности вдоль ее образующей через относительную кривизну этой поверхности.

Нормальной называется конгруэнция, геодезические которой ортогонально пересекают некоторую поверхность (нормальную поверхность конгруэнции).

Выводится необходимое и достаточное условие нормальности конгруэнции. В частности, таким условием является ортогональность развертывающихся поверхностей конгруэнции. Развертывающиеся поверхности нормальной конгруэнции пересекают ее нормальные поверхности по линиям кривизны и, наоборот, геодезические, нормальные к поверхности вдоль линии кривизны, образуют развертывающиеся поверхности образованной ими же нормальной конгруэнции геодезических. В. Ф. Рогаченко

1753. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. VI. Ч е х Э д у а р д, Чехосл. матем. ж., 1953, 2, № 4 297—331 (рез. франц.)

Между линейными пространствами n измерений S_n и S'_n устанавливается точечное соответствие. Каждой паре соответствующих точек A,B сопоставляется ∞^n способами касательная коллинеация так, что для всякой кривой Γ в S_n, проходящей через точку A, ее образ Γ' (при данном соответствии) и ее образ $K\Gamma$ (при коллинеации K) имеют в точке B аналитическое касание первого порядка. В связке A существуют особые (K-главные) прямые; если касательная к кривой Γ в точке A — K-главная, то Γ' и $K\Gamma$ имеют в точке B аналитическое касание второго порядка.

Ищутся такие соответствия между S_n и S'_n, у которых для каждой точки A из S_n можно выбрать касательную коллинеацию K так, что в связке A найдется гиперплоскость (K-главная гиперплоскость точки A) такая, что каждая прямая этой гиперплоскости в точке A — K-главная.

Эта задача распадается на две. В голономном случае пространство S_n распадается на ∞^1 (K-главных) гиперповерхностей, так что через каждую точку A некоторой области в S_n проходит одна гиперповерхность и ее касательная гиперплоскость в точке A будет K-главной. При таком соответствии каждая K-главная гиперповерхность проективно изгибается, и задача состоит в отыскании проективных изгибаний слоя гиперповерхностей. Второй случай (неголономный) сводится к отысканию проективных изгибаний неголономной гиперповерхности.

Находятся все соответствия, дающие двумя различными способами решение поставленной задачи, т. е. соответствия, у которых каждой точке A из S'_n можно сопоставить две касательные коллинеации (различные или совпадающие) K_1 и K_2 так, что через точку A проходят две гиперплоскости ρ_1 — K_1-главная и ρ_2—K_2-главная. Искомые соответствия содержатся среди соответствий, определенных в II и III частях этой серии (Časop. pěstov. mat. a fys., 1949, 74, 2; 1950, 75, 1 — 2) и обладают интересными геометрическими свойствами. Т. А. Шульман

1754. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. VII. Ч е х Э д у а р д, Чехосл. матем. ж., 1953, 3, № 2, 123—137 (рез. франц.)

Эта статья является непосредственным продолжением предыдущей (VI) (реф. 1753). Рассматривается голономный случай распадения пространства S_n на ∞^1 гиперповерхностей (слой σ), причем каждая из этих гиперповерхностей при заданном соответствии проективно изгибается. Эти изгибания могут быть двух типов. Пусть K — касательная коллинеация для точки A, определенная в статье I (Časop. pěstov. mat. a fys., 1949, 74, 2) и реализующая изгибание слоя σ. Если возможен выбор такой коллинеации K, при котором K-линеаризирующие прямые связки A (в смысле статьи I) лежат в K-главной гиперплоскости, определенной в статье VI, то проективное изгибание слоя σ называется специальным. В настоящей статье рассматриваются только неспециальные изгибания. Только параболические слои допускают неспециальные изгибания. Доказывается теорема существования для задачи о проективном изгибании параболического слоя гиперповерхностей. Каждый такой слой S_n допускает изгибания с произволом $2n+2$ функций одного аргумента. При этом слой в S_n называется параболическим, если 1) каждая гиперповерхность слоя является огибающей ∞^1 гиперплоскостей, 2) дуальный образ семейства ∞^2 гиперплоскостей, касательных к гиперповерхностям слоя, в дуальном к S_n пространстве Σ_n, определенном в статье VI, является поверхностью, на которой дуальные образы гиперповерхностей слоя образуют семейство асимптотических линий. Т. А. Шульман

1755. Формулы, родственные формуле Гаусса-Бонне для некоторых наложений одного многообразия n измерений на другое. Ш в а р ц (Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines appli-

cations d'une variété à n dimensions dans une autre. Schwartz Marie-Hélène), Acta math., 1954, 91, № 3—4, 189—244 (франц.)

Работа посвящена изучению «регулярных наложений» f компактных и ориентированных многообразий V (измерения $n>1$ и класса C_2) на многообразия W того же самого типа, которые, однако, могут и не быть компактными. Такие наложения удовлетворяют следующим условиям: 1) они дважды непрерывно дифференцируемы, 2) существует регулярная триангуляция (D) многообразия V такая, что сведение (restriction) f ко всем открытым симплексам D_i^k из (D) есть односторонне дифференцируемый (класса C_2) гомеоморфизм, переводящий каждый симплекс D_i^k в дифференцируемое подмногообразие Δ_i^k из W. В свою очередь, регулярная триангуляция определяется как образ симплициального евклидова комплекса $(\hat{D})$ в гомеоморфизме φ, сохраняющем структуру комплекса и обладающем тем свойством, что сведение φ ко всем замкнутым симплексам $\hat{\bar{D}}_i^k$ из $(\hat{D})$ есть односторонне дифференцируемый гомеоморфизм класса C_2, переводящий каждый $\hat{\bar{D}}_i^k$ в $\bar{D}_i^k$, сведение же φ ко всем открытым $\hat{D}_i^k$ из $(\hat{D})$ есть двусторонне дифференцируемый гомеоморфизм класса C_2, переводящий каждый $\hat{D}_i^k$ в дифференцируемое подмногообразие D_i^k из V.

Автор обобщает на регулярные наложения формулу Гаусса-Бонне в том ее виде, как она была дана Альфорсом (Ahlfors, Acta Soc. Sci. Fen., 1937, Nova ser. A, 2, № 6). Это обобщение сводится к формулам Чжэня (Chern, Ann. Math., 1944, 45) в случае, когда f сводится к гомеоморфизму. Формулы, полученные автором, записываются следующим образом:

$$\int_C \Omega_0^* = \int_{\mathfrak{R}^+(\dot{C})} -\Pi^* + \chi_f(C), \tag{1}$$

$$\int_C \Omega_0^* = \int_{\mathfrak{R}^-(\dot{C})} -\Pi^* + \chi_f'(C), \tag{2}$$

$$\int_{\mathfrak{R}(U} \Pi^* = \chi_f(U), \tag{3}$$

$$\chi_f(\dot{U}) = 2\chi_f(U) = -2\chi_f'(U). \tag{4}$$

Здесь C — некоторое подмногообразие V, имеющее в качестве триангуляции соответствующий подкомплекс триангуляции (D). $\chi_f(C) = \sum_{i,k} (-1)^k m(D_i'^k)$ для $D_i'^k \subset C$, причем $m(D_i'^k)$ — топологическая степень на симплексе $D_i'^k$. $\chi_f'(C)$ — внутренняя характеристика, определяемая только для внутренней области C. Когда f есть гомеоморфизм, то χ_f сводится к характеристике Эйлера-Пуанкаре χ. Ω^* — форма n-го порядка на V, являющаяся образом фундаментальной формы Ω многообразия W при наложении f, Π^* — форма, определяемая равенством $\Omega^* = -d\Pi^*$, где Ω^* — форма степени n, являющаяся образом формы Ω_0^* при каноническом отображении, которое каждому вектору ставит в соответствие его начало. $\dot{C}$ — граница многообразия C, а $\mathfrak{R}^+(\dot{C})$ и $\mathfrak{R}^-(\dot{C})$ — циклы, определяемые границей $\dot{C}$ в пространстве $\mathfrak{B}_s$ специальных векторов для (D), касательных к D_i^k, причем знак «+» соответствует векторам, выходящим из C, а «—» — входящим в C вдоль $\dot{C}$. U — некоторое разбитое в ячейки (transversal) многообразие, причем в случае формулы (3) требуется, чтобы его измерение было $\leqslant n-1$, а в случае формулы (4) измерение должно быть нечетным и $\leqslant n$. $\dot{U}$ — граница U.

Н. И. Кованцов

1756. Погружение эллиптических пространств в евклидовы пространства с помощью координат Вейерштрасса. Блануша (Immersion des espaces elliptiques dans des espaces euclidiens à l'aide de coordonnées de Weierstrass. Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 3, 181—182 (франц.; рез. хорв.)

Заметка, в которой сообщается, как изометрическое погружение эллиптического n-мерного пространства в евклидово N-мерное, $N=n(n+3)/2$, рассмотренное автором ранее (РЖМат, 1954, 4158; 1955, 1460), может быть более просто задано с помощью координат Вейерштрасса.

В. В. Рыжков

1757. Проблема Коши в многомерной дифференциальной геометрии. I. Об изометрическом погружении и изгибании римановых пространств. Лейхтвейсс (Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. I. Zur isometrischen Einbettung und Verbiegung von Riemannschen Räumen. Leichtweiss Kurt), Math. Ann., 1956, **130**, № 5, 442—474 (нем.)

Рассматривается проблема изометрического погружения «в малом» риманова многообразия R_m в римановo многообразие R_n при $n \geqslant m(m+1)/2$. Эта проблема для случая, когда R_n—евклидово пространство, решена Картаном (Cartan E., Ann. Soc. Pologne math., 1927, 6, 1—7), а в общем случае Бурстином (Матем. сб., 1931, 38, 74 — 85). Автор несколько усиливает результаты указанных авторов и получает их отличным методом. Доказываются теоремы:

Аналитическое риманово многообразие R_m допускает локальное аналитическое изометрическое погружение в аналитическое риманово многообразие R_n, если $n \geqslant m(m+1)/2$, причем так, что заданная начальная точка многообразия R_m переходит в заданную точку R_n.

Устанавливается произвол, с которым погружение R_m в R_n осуществляется. В частности, при $n=m(m+1)/2$, если погружение подмногообразия R_{m-1} многообразия R_m задано, то R_m в общем случае допускает только два различных способа погружения.

Аналитическое риманово многообразие R_m в R_n при $n \geqslant m(m+1)/2$ в окрестности точки P, не являющейся точкой уплощения R_m относительно R_n, допускает аналитическое изгибание.

Изометрические аналитические многообразия R_m' и R_m'' в R_n при $n>m(m+1)/2$, не содержащие точек уплощения, «в малом» аналитически изгибаемы друг в друга.

Доказательство этих теорем основано на теореме Коши-Ковалевской в применении к системе дифференциальных уравнений, к которой редуцируется проблема погружения.

А. В. Погорелов

1758. Римановы симметрические пространства и симметрические пространства аффинной связности. Кобаяси (Espaces à connexions affines et riemanniennes symétriques. Kobayashi Shoshichi), Nagoya Math. J., 1955, **9**, oct., 25—37 (франц.)

Теория связности в расслоенных пространствах применяется к симметрическим римановым пространствам, симметрическим пространствам аффинной связности и пространствам аффинной связности с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения (localement réductive). В терминах теории расслоенных пространств формулируются условия обращения в нуль ковариантных производных тензоров кривизны и кручения. Далее вновь получены некоторые результаты Бореля и Лихнеровича (Borel A., Lichnerowicz A., C. R. Acad. sci., 1952, **234**, 2332—2334). В конце работы рассматриваются некоторые примеры, в частности, пример локально симметрического риманова пространства, не являющегося симметрическим пространством в целом. А. С. Феденко

1759. Исследования по римановым однородным пространствам. Номидзу (Studies on Riemannian homogeneous spaces. Nomizu Katsumi), Nagoya Math. J., 1955, **9**, oct., 43—56 (англ.)

Дифференцируемое преобразование риманова многообразия M называется аффинным, если оно сохраняет риманову связность. Пусть $A(M)$ — группа всех аффинных преобразований пространства M и $A^\circ(M)$ — связная компонента единицы в этой группе. Доказывается, что если M неприводимо, то всякая компактная подгруппа группы $A(M)$, всякая ее полупростая подгруппа и коммутант этой группы состоят из изометрических преобразований. Пусть пространство M приводимо и пусть T_0 — пространство всех касательных векторов в некоторой его точке, инвариантных относительно группы голономии. Если M односвязно и полно и если $\dim T_0 \leqslant 1$, то всякая компактная подгруппа группы $A^\circ(M)$, всякая ее полупростая подгруппа и коммутант этой группы состоят из изометрических преобразований.

Многообразие M называется римановым однородным, если связная компонента единицы в группе всех его изометрических преобразований действует на нем транзитивно. Пусть M — односвязное римановo однородное пространство. Рассматривается принадлежащее де Раму разложение пространства M в прямое произведение взаимно ортогональных евклидова пространства и неприводимых неевклидовых пространств и доказывается, что все сомножители сами являются римановыми однородными пространствами. Если линейная группа изотропии неприводима, то M либо евклидово, либо неприводимо и неевклидово. Вычисляется также алгебра голономии, т. е. алгебра Ли группы голономии пространства G/H, где H компактна и линейная группа изотропии неприводима.

А. Л. Онищик

1760. О парах телепараллелизма. II. Сен (On pairs of teleparallelisms. II. Sen R. N.), J. Indian Math. Soc., 1955, **19**, № 2, 61—71 (англ.)

Пара интегрируемых параллельных перенесений (телепараллелизм) была введена автором (РЖМат, 1954, 1797) с помощью двух полей ортонормированных триэдров в соответствующем V_3. В настоящей работе выделенный тип пространств, обобщающий пространства постоянной кривизны и зависящий от одной аналитической функции одного аргумента, подвергается дальнейшему изучению.

Устанавливается, что в пространствах постоянной кривизны триэдры, с помощью которых вводятся два параллелизма Клиффорда, порождают две взаимные просто транзитивные группы движений. Далее вводятся условия, обобщающие взаимность двух просто транзитивных групп и сохранение метрики относительно преобразований. Показано, что в найденном автором конкретном V_3 эти обобщенные условия выполняются. Так, например, выполняются условия, в силу которых из двух положений: а) два поля триэдров, определяющих телепараллелизм, порождают просто транзитивные взаимные группы; б) поле триэдров определяет просто транзитивную группу движений; одно влечет другое. Исследование показывает, что рассматриваемое пространство является симметрическим пространством не постоянной кривизны, но обладающим постоянной скалярной кривизной, причем его геодетики не совпадают с автопараллелями. Канонический тип пространства не установлен. Б. Л. Лаптев

1761. Геодезические (проективные) преобразования римановых пространств. Солодовников А. С., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 3, 419—422

Исследуются собственно римановы пространства V_n, допускающие группу геодезических преобразований. Метод для определения части этих пространств был указан Фубини (Mem. Accad. Torino, 1903, **53**, № 2,261). Автор дает исчерпывающую характеристику всех остальных V_n и их геодезических групп преобразований. Эти V_n разбиваются на два класса:

Класс I составляют пространства $V(K)$, метрика которых приводится к виду

$$ds^2 = ds_0^2 + \overset{\alpha}{\sigma} ds_\alpha^2 \quad (\alpha = 1, .., r), \tag{1}$$

а «присоединенная» метрика $ds^{*2} = ds_0^2 + \overset{\alpha}{\sigma}\, dy_\alpha^2$ имеет постоянную кривизну K. Здесь ds_0^2 и ds_α^2 — самостоятельные метрики, а функции $\overset{\alpha}{\sigma}$ зависят от переменных из ds_0^2. В этом случае (1) называется K-разложением. Указываются канонические типы пространства $V(K)$ и формулируются теоремы:

1) Пространство $V(K)$ тогда и только тогда имеет постоянную кривизну K, если каждая из форм ds_α^2 имеет постоянную кривизну

$$K_\alpha = (1/4\overset{\alpha}{\sigma})\, \Delta_1 \overset{\alpha}{\sigma} + K \overset{\alpha}{\sigma}$$

($K_\alpha = \text{const}$ для любого K-разложения (1)).

2. Максимальное K-разложение определяется однозначно. Максимальным называется такое разложение (1), при котором никакое пространство ds_α^2 не является $V(K_\alpha)$.

3. При максимальном K-разложении (1) любое геодезическое преобразование действует отдельно в каждом пространстве ds_0^2, ds_α^2.

Указываются полные геодезические группы (в том числе группы движений) в пространствах $V(K)$, K-разложение предполагается максимальным.

Класс II составляют пространства V_n, допускающие только аффинные преобразования. Их метрика имеет вид в специальной системе координат $ds^2 = ds_1^2 + \ldots + ds_l^2$, где ds_α^2 — неприводимые и неодномерные метрики, не являющиеся $V(0)$, и при этом по крайней мере одна из них, например ds_1^2, имеет вид $ds_1^2 = e^x d\sigma^2$, где коэффициенты $d\sigma^2$ от x не зависят. Любое аффинное преобразование действует независимо в каждом пространстве ds_α^2. Результаты приведены без доказательств.

Г. И. Кручкович

1762. О циклических точках групповых пространств. Хориэ (On cyclic points of group-spaces. Horie Nobuo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 1, 35—41 (англ.)

Рассмотрим групповое пространство S группы G (Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., Изд-во ин. лит., 1949, стр. 9). Пусть сдвиг T_p, соответствующий точке p, переводит a в b и a' в b' (тогда $T_b = T_p T_a$, $T_{b'} = T_p T_{a'}$). Точка p называется циклической относительно начальной точки a_0 (соответствующей единичному преобразованию), если $T_{b'} T_b^{-1} = T_{a'} T_a^{-1}$ для любых a и a'. Доказывается необходимое и достаточное условие цикличности точки p: при «левом» и «правом» перенесении репера из точки a_0 в точку p должен получаться один и тот же результат (РЖМат, 1956, 4059). И. З. Розенкноп

1763. О полуинволюции. Либерман (Sur la semi-involution. Libermann Paulette), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 21, 1444—1447 (франц.)

С алгеброй Ли $L(G)$ (группы G), выделяемой (в полной алгебре линейных преобразований) уравнениями $\sum_{i,j} \rho_j^{\alpha i} b_j^i = 0$ связывается множество Φ инфинитезимальных l-струй (jets) с началом и целью O (РЖМат, 1956, 736), определяемое системой дифференциальных уравнений $\sum_{i,j} \rho_j^{\alpha i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = 0$. Пусть Φ^1 — голономное продолжение Φ, j^1 — каноническая проекция Φ^1 на Φ. Выводная группа $G^{(1)}$ (groupe déduit) Э. Картана (Oeuvres complètes, II, 857—926) определяется автором как прообраз при j^1 тождественной струи из Φ; аналогично можно получить следующие выводные группы $G^{(2)}, G^{(3)}, \ldots$ Условие инволютивности группы G формулируется так: голономное продолжение Φ должно совпадать с неголономным. Доказывается утверждение Картана: если группы $G^{(k)} \neq e$, то группа G полуинволютивна, т. е., начиная с некоторой, группы $G^{(k)}$ инволютивны. Указываются соотношения между размерностями выводных групп и характеристическими числами Картана (см. цитированную работу). И. З. Розенкноп

1764. Определение внешней производной в терминах производных Ли. Палейс (A definition of the exterior derivative in terms of Lie derivatives. Palais Richard S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 902—908 (англ.)

Вначале излагается определение понятия производной Ли тензорного поля по отношению к векторному полю, выдержанное в духе теории многообразий, без привлечения координатных систем. Пусть $\mathfrak{M} - C^\infty$ многообразие, R — система действительных чисел с обычной C^∞ структурой. Пусть $\varphi - C^\infty$ отображение открытого подмножества $R \times \mathfrak{M}$, обозначаемого $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{M}$. Для каждого $p \in \mathfrak{M}$ определяется $I^{(p)} = [t \in R : (t, p) \in \mathfrak{D}]$; предполагается, что $I^{(p)}$ — интервал, содержащий точку 0, причем $\varphi(0, p) = p$. Для каждого $t \in R$ полагаем $S_t = [p \in \mathfrak{M} : (t, p) \in \mathfrak{D}]$ и определяем $\varphi_t : S_t \to \mathfrak{M}$ с помощью $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$. Если при этом из принадлежности (τ, p), $(t, \varphi(\tau, p))$, $(t + \tau, p)$ к $\mathfrak{D}$ следует $\varphi(t + \tau, p) = \varphi(t, \varphi(\tau, p))$, то говорят, что φ — однопараметрическая квазигруппа преобразований $\mathfrak{M}$; если она не включается как собственная часть ни в какую другую аналогичную квазигруппу, она называется максимальной.

Для $p \in \mathfrak{M}$ и любой действительно-значной функции f класса C^∞ на $\mathfrak{M}$ определяется $L_p(f) = (d/dt)_{t=0} f(\varphi(t, p))$; здесь L_p — касательный вектор многообразия в p и $L : p \to L_p - C^\infty$ векторное поле, называемое инфинитезимальным преобразованием φ. Приводится теорема 1: Всякое C^∞ векторное поле на C^∞ многообразии порождает единственную максимальную однопараметрическую квазигруппу преобразований $\varphi^{(L)}$. Однопараметрическая квазигруппа преобразований φ имеет инфинитезимальный генератор L, если и только если она содержится в $\varphi^{(L)}$.

Тензорное поле на $\mathfrak{M}$ определяется следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}_p$ — касательное пространство $\mathfrak{M}$ в точке p; r — контравариантный и s — ковариантный тензор определяется, как полилинейный функционал на $\mathfrak{M}_p^* \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^* \times \mathfrak{M}_p \times \ldots \mathfrak{M}_p$ (r сомножителей $\mathfrak{M}_p^*$ и s сомножителей $\mathfrak{M}_p$). Если φ — неособенное C^∞ отображение $\mathfrak{M}$ на себя, то через $\delta\varphi$ обозначается не только дифференциал φ, но и связанные с ним изоморфные отображения тензорных пространств в p на тензорные пространства в $\varphi(p)$. Тогда, если A — тензорное поле, его отображение обозначается через $\delta\varphi(A)$. Производной Ли поля A в точке p по отношению к L называется $(d/dt)_{t=0} \delta\varphi_{-t}(A_{\varphi_t(p)})$ (если это выражение существует). Обозначается производная Ли через $L[A]_p$ и, если она существует везде, то отображение $p \to L[A]_p$ записывается как $L[A]$. Доказывается (теорема 2), что если $A - C^\infty$ тензорное поле, то $L[A]$ существует и также образует C^∞ тензорное поле той же валентности, что и A. Рассматриваются свойства производной Ли, в том числе (теорема 6) дается обобщение формулы Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме.

Если $M_1, M_2, \ldots, M_{k+1} - C^\infty$ векторные поля на $\mathfrak{M}$ и Θ — k-линейная кососимметрическая форма, то можно ввести, пользуясь производной Ли, C^∞ функцию на $\mathfrak{M}$ с помощью

$$d_{M_1 \ldots M_{k+1}}\Theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \{M_i [\Theta\langle M_1, \ldots, \widehat{M}_i, \ldots$$

$$\ldots M_{k+1}\rangle] + M_i[\Theta]\langle M_1, \ldots, \widehat{M}_i, \ldots M_{k+1}\rangle\}$$

(знак над M_i справа указывает на пропуск соответствующего M_i). Оказывается, что существует единственная $k+1$-линейная форма Φ такая, что $\Phi\langle M_1, \ldots, M_{k+1}\rangle = d_{M_1 \ldots M_{k+1}}\Theta$ для любых C^∞ векторных полей на $\mathfrak{M}$. Форма Φ называется внешней производной от Θ: $d\Theta = \Phi$; устанавливается совпадение этого определения с обычным. В. В. Рыжков

1765. Пространства со связностью в целом. I—VI. Такасу (Connection spaces in the large. I—VI. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1953, 1, № 1, 1—87 (англ.)

Для дифференцируемого многообразия $M_n(x^i)$ с общей линейной связностью $\Lambda^\lambda_{\mu\nu}$ автор вводит неголономную систему отнесения $\omega^l = \omega^l_\mu(x)\, dx^\mu$ и пересчетом получает для нее определение тензора, выражение ковариантной производной, связности

$$\Lambda^k_{mn} = \omega^k_\nu \left(\frac{\partial \Omega^\nu_m}{\omega^n} + \Omega^\lambda_m \Omega^\mu_n \Lambda^\nu_{\lambda\mu} \right)$$

(где $\Omega^\wedge_m$ определяются соотношениями $\omega^l_\lambda \Omega^\mu_l = \delta^\mu_\lambda$), условие параллельного перенесения вектора, уравнение геодезической («автопараллельной»)

$$\frac{d}{dt}\frac{\omega^l}{dt} + \Lambda^l_{mn} \frac{\omega^m}{dt} \frac{\omega^n}{dt} = 0.$$

Затем, положив неголономную связность $\overset{*}{\Lambda}{}^{k}_{mn} = 0$ равной нулю (т. е. соответствующую голономную $\overset{*}{\Lambda}{}^{\times}_{\mu\nu}$ равной $\overset{*}{\Lambda}{}^{\times}_{\mu\nu} = -\omega^{l}_{\mu}\left(\frac{\partial \Omega^{\times}_{l}}{\partial x^{\nu}}\right)$, получает другие геодезические линии («проективно геодезические»), задаваемые уравнением $\int \frac{\omega^{a}}{dt}\,dt = \gamma^{a}t + \alpha^{a}$, где γ^{a}, α^{a} — константы. Эти линии отображаются на прямые $\xi^{a} = \gamma^{a}t + \alpha^{a}$ аффинного пространства.

Далее автор повторяет эти рассуждения для пространств с аффинной и евклидовой связностью, вводя, в частности, для последних специальную неголономную систему, относительно которой линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = c_{mn}\,\omega^{m}\,\omega^{n}, \qquad c_{mn} = \text{const},$$

и рассматривает пример отображения сферы на цилиндр и развертывания последнего на плоскость, при этом проективно геодезическими оказываются локсодромии.

В IV—VI частях применяются эти рассуждения в лагерровой, конформной геометрии и геометрии Ли.

М. В. Васильева

1766. О внутренней производной на обобщенной неголономной поверхности. Кацурада (On the intrinsic derivative in the non-holonomic exsurface. Katsurada Yoshie), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1953, ser. I., **12**, № 4, 157—162 (англ.)

В пространстве $K_n^{(M)}$ линейных элементов M-го порядка рассматривается неголономная поверхность, определяемая системой уравнений Пфаффа

$$\sum_{\alpha=0}^{M} \lambda^{a'}_{\alpha i}(x, x' \ldots x^{(M)})\,dx^{(\alpha)i} = 0, \quad (a' = 1, \ldots, n),$$

где индекс в скобках обозначает порядок дифференцирования по параметру.

Отправляясь от обобщенного контравариантного вектора $v^{\alpha i}$ ранга R в пространстве $K_n^{(M)}$ на неголономной поверхности определяются векторы v^{a} при помощи формулы

$$\binom{M}{R} v^{a'} = \sum_{\alpha=M-R}^{M} \binom{\alpha}{M-R} \lambda^{a'}_{\alpha i} v^{\alpha-M+R,i}.$$

Если $v^{(\alpha)i}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, R$ являются компонентами обобщенного тензора, полученного последовательным дифференцированием вектора v^{i} по параметру, то компоненты соответствующего вектора на неголономной поверхности называются внутренними производными R-го порядка от компонент вектора $v^{a'} = \lambda^{a'}_{Mi} v^{i}$

$$\frac{\delta^{R} v^{a'}}{dt^{R}} = \sum_{\alpha=M-R}^{M} \binom{\alpha}{M-R} \lambda^{a'}_{\alpha i} v^{(\alpha-M+R)i}.$$

Это определение обобщает введенное Крейгом понятие внутренних производных (Craig H. V., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **52**, № 4, 332—342). Доказывается, что обобщенные внутренние производные первого порядка, определенные таким образом, выражаются в виде

$$\frac{\delta v^{a'}}{dt} = \frac{dv^{a'}}{dt} + \Gamma^{a'}_{b'} v^{b'},$$

где $\Gamma^{a'}_{b'}$ — экстенсив, составленный из коэффициентов $\lambda^{a'}_{\alpha i}$ и их производных. Выводятся соответствующие выражения для внутренних производных высших порядков.

М. А. Акивис

1767. Неголономное X_n^m с общей векторной метрикой. Челнокова В. Н., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 61—68

Автор, основываясь на двух работах В. В. Вагнера (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1949, **7**, 65—166; 1950, **8**, 11—72), инвариантно вводит в неголономном составном многообразии $E_m(X_n)$ с регулярной контравариантной векторной метрикой линейную метрическую связность, которая, в частности, для пространства Финслера превращается в связность Бервальда.

П. М. Олоничев

1768. Об инфинитезимальных изометриях финслерова пространства. Хассан Акбар-Заде (Sur les isométries infinitésimales d'une variété finslérienne. Hassan Akbar-Zadeh), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 5, 608—610 (франц.)

Показано, что однопараметрическая группа изометрии финслерова пространства V_n, определенная инфинитезимальным преобразованием ξ на V_n, характеризуется тем фактом, что ковариантная производная типа ∇_l переставновочна с производной Ли относительно ξ.

Л. Е. Евтушик

1769. Связность в финслеровом пространстве как индуцированная связность. Яно, Дейвис (On the connection in Finsler space as an induced connection. Yano K., D'avies E. T.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 3, 409—417 (англ.)

Финслеровым пространством называют n-мерное многообразие с локальными координатами x^{i}, в котором определена длина дуги кривой $x^{i} = x^{i}(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} L(x\dot{x})\,dt,$$

где $L(x, \dot{x})$ — положительная функция, однородная первого порядка по отношению к $\dot{x}^{i} = dx^{i}/dt$.

Авторы рассматривают финслерово пространство как неголономную поверхность в метрическом пространстве с кручением. После этого связность финслерова пространства может быть получена как индуцированная связностью объемлющего пространства.

Для построения объемлющего пространства рассматривается $2n$-мерное многообразие V_{2n} элементов $(x^{i}, \dot{x}^{i})$. Обозначая $\dot{x}^{i} = x^{n+i}$, считаем допустимыми только преобразования координат вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^{k}), \quad x^{n+i'} = (\partial x^{i'}/\partial x^{i})\,x^{n+i}.$$

Этот вид преобразований позволяет специализовать неголономный репер в V_{2n} так, чтобы компоненты инфинитезимального смещения его начала, обозначаемые (dx) и $(dx)^{n+i}$, имели вид:

$$(dx)^{i} = dx^{i}, \quad (dx)^{n+i} = dx^{n+i} + \Gamma^{i}_{j}\,dx^{j},$$

а их внешние дифференциалы

$$D(dx)^{i} = 0; \; D(dx)^{n+i} = \Omega^{\cdot\cdot n+i}_{kj}[(dx)^{k}(dx)^{j}] +$$

$$+ \Omega^{\cdot\cdot n+i}_{n+k,j}[(dx)^{n+k}(dx)^{j}].$$

Метрика в V_{2n} вводится по формуле

$$ds^2 = g_{ij}\,(dx)^{i}(dx)^{j} + g_{ij}\,(dx)^{n+i}(dx)^{n+j},$$

где $g_{ij} = {}^{1}/_{2}\,\partial^2 L/\partial x^{n+i}\,\partial x^{n+j}$.

Помимо метрики, в V_{2n} вводится аффинная связность с кручением. Обозначим тензор кручения этой связности $T^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, 2n$).

На неголономной поверхности $(dx)^{n+i} = 0$ индуцируется связность финслерова пространства, определенного функцией $L(x, \dot{x})$, если компоненты $T^{\cdot\cdot i}_{jk}$ и $T^{\cdot\cdot i}_{n+j,\,k}$ удовлетворяют соотношениям

$$T^{\cdot\cdot i}_{jk} + T^{i}_{\cdot jk} + T^{i}_{\cdot kj} = 0,$$

$$\Omega^{i}_{k,\,n+j} + T^{\cdot\cdot i}_{n+j,\,k} + T^{i}_{\cdot h+j,\,k} + T^{i}_{\cdot k,\,n+j} = 0.$$

Здесь обозначено $T^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma} = g^{\alpha\delta} g_{\gamma\varepsilon} T^{\cdot\cdot\varepsilon}_{\delta\beta}$ и $\Omega^{i}_{k,\,n+j} = g^{ip} g_{n+q,\,n+j} \Omega^{\cdot\cdot n+q}_{pk}$. Д. В. Беклемишев

1770. О группе голономии конформно плоского риманова многообразия. Курита (On the holonomy group of the conformally flat Riemannian manifold. Kurita Minoru), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 161—171 (англ.)

Доказано, что локальная однородная группа голономии n-мерного конформно плоского риманова многообразия отлична от $SO(n)$ только для трех типов пространств. Она тривиальна для плоского пространства, равна $SO(p)\times SO(n-p)$ для прямого произведения p-мерного пространства постоянной кривизны K на $(n-p)$-мерное пространство постоянной кривизны $-K$ и равна $SO(n-1)$ для прямого произведения $(n-1)$-мерного пространства постоянной кривизны на прямую. Результат получен прямым исследованием структуры тензора кривизны. А. М. Васильев

1771. Инфинитезимальные автоморфизмы симплектической структуры. Либерман (Automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique. Libermann Paulette), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 9, 1114—1117 (франц.)

Симплектическая структура на четномерном многообразии V_{2n} класса C^{∞} определяется заданием на нем замкнутой внешней квадратичной формы Ω, ранг которой равен $2n$ в каждой точке. В работе изучаются инфинитезимальные преобразования V_{2n}, оставляющие эту форму инвариантной. Доказано, что пространство $\mathfrak{L}$ инфинитезимальных автоморфизмов симплектической структуры изоморфно вещественному бесконечномерному векторному пространству $\hat{\mathfrak{L}}$ замкнутых форм Пфаффа на V_{2n}. Это позволяет определить на V_{2n} скобки Пуассона, в этой форме введенные для R^{2n} в работе Картана (Cartan E., Invariants intégraux, Paris, 1922). Скобки Пуассона определяют в кольце числовых функций класса C^{∞} на V_{2n} структуру бесконечномерной алгебры Ли.

Аналогичное исследование проводится для $SL(p, R)$-структур, задаваемых на V_p класса C^{∞} p-формой ранга p.

Полученные результаты применяются для исследования автоморфизмов почти симплектических структур (форма Ω не обязательно замкнута) и ориентируемых римановых многообразий. Д. В. Беклемишев

1772. Пространство келеровых метрик. Калаби (The space of Kähler metrics. Calabi Eugenio), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 206—207 (англ.)

Пусть M_n — келерово многообразие, ω — его основная внешняя квадратичная форма, $2\pi C^1$ — внешняя форма Риччи.

Теорема 1. В пространстве Ω всех келеровых метрик на M_n, основные формы которых принадлежат когомологическому классу формы ω, существует точно одна, форма Риччи которой совпадает с наперед заданной бесконечно дифференцируемой внешней формой типа (1,1), когомологичной $2\pi C^1$. Намечен только путь доказательства. По однопараметрическому семейству форм, соединяющему $2\pi C^1$ с заданной формой, строится семейство метрик, а затем доказывается независимость конечной метрики от выбранного пути. Привлекаются топологические свойства пространства Ω.

Теорема 2. Если всякая однопараметрическая группа комплексных преобразований M_n (если она существует) не оставляет на месте ни одной точки M_n, в Ω существует единственная с точностью до аналитических преобразований пространства метрика, скалярная кривизна которой постоянна. А. М. Васильев

1773. Келеровы многообразия ограниченного типа. Кодаира (On kähler varieties of restricted type. Kodaira K.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, 40, № 5, 313—316 (англ.)

Предварительное сообщение о результате (РЖМат, 1956, 6823).

1774. О некоторых характеристических классах компактных келеровых многообразий. Апте (Sur certaines classes caractéristiques des variétés Kähleriennes compactes. Apte Madhumalati), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 2, 149—151 (франц.)

Известно, что всякая замкнутая внешняя квадратичная дифференциальная форма на компактном келеровом многообразии V_{2n} единственным образом представляется в виде $\Phi = d\alpha + H_0 + \lambda F$, где α — линейная форма, F — фундаментальная внешняя квадратичная форма, λ — постоянная, H_0 — гармоническая эффективная форма, т. е. $FH_0^* = 0$ (H_0^* двойственна к H_0).

Если Φ — форма Риччи многообразия, то $\lambda = \int_{V_{2n}} R\, dv / 2nV$,

$$(H_0, H_0) = \int_{V_{2n}} R_{ik}R^{ik}\, dv - \frac{1}{2}\int_{V_{2n}} R^2\, dv + \frac{(n-1)}{2nV}\left[\int_{V_{2n}} R\, dv\right]^2.$$

Здесь V — объем пространства, R — скалярная кривизна. Эти формулы позволяют проверить, когда форма Риччи гомологична форме, пропорциональной F, а когда — эффективной форме.

Непосредственным подсчетом показано, что равенство нулю четырехмерного цикла Чжэня на компактном келеровом пространстве Эйнштейна влечет равенство нулю тензора кривизны. А. М. Васильев

1775. О числах Бетти рациональных многообразий. Деннистон (Sui numeri di Betti delle varietà razionali. Dennistone Ralph H. F.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fiz., mat. e natur., 1955 (1956), **19**, № 6, 418—421 (итал.)

Пусть в комплексном проективном пространстве даны два неприводимых неособенных n-мерных алгебраических многообразия (м.) V, V', находящиеся в бирациональном соответствии, не имеющем фундаментальных точек на V', и пусть W'—м. на V', соответствующее м. фундаментальных точек на V. В предположении, что V не имеет трансцендентных классов гомологии размерностей $2n-2$, $2n-3$ и что W' не имеет коэффициентов кручения размерности $2n-3$ показывается, что $H_k(V') \cong H_k(V) + H_k(W')$ ($k = 2n-2$, $2n-3$).

Отсюда следует, что при любом $n>2$ и произвольном целом положительном p можно построить n-мерное рациональное м., для которого $2n-3$-мерное число Бетти равно $2p$ (оно получается, если n-мерное проективное пространство подвергнуть дилатации, базис которой — кривая жанра p без особых точек). Таким образом,

только одномерные и двумерные рациональные м. без особых точек всегда свободны от трансцендентных классов гомологии (ср. Ehresmann, Ann. Math., 1934, 35, 443). В. В. Морозов

1776. Однородные келеровы пространства. Лихнерович (Espaces homogénes Kählériens. Lichnerowicz André), Colloq. internat. Centre. nat. tech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 171—184 (франц.)

Подробное изложение результатов, предварительное сообщение о которых опубликовано ранее (РЖМат, 1956, 735). А. М. Васильев

1777. Теорема об однородных комплексных пространствах. Лихнерович (Un théorème sur les espaces homogènes complexes. Lichnerowicz André), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 207—215 (франц.)

В $2n$-мерном пространстве с комплексной структурой можно ввести эрмитову связность, в которой параллельный перенос сохраняет как метрику, так и комплексную структуру. Если локальная однородная группа голономии этой связности принадлежит группе $SU(n)$, свернутый тензор кривизны равен нулю. Эрмитово однородное пространство, линейная группа изотропии которого неприводима и не принадлежит к $SU(n)$, является неприводимым симметрическим пространством в смысле Картана. Если линейная группа изотропии неприводима и принадлежит $SU(n)$, то и группа голономии принадлежит $SU(n)$. Если при этом пространство компактно, то оно локально евклидово. Доказательства такие же, как и для соответствующих результатов, относящихся к келеровым пространствам (РЖМат, 1956, 735). А. М. Васильев

1778. Три замечательные аффинные связности в почти эрмитовых пространствах. Яно (On three remarkable affine connexions in almost hermitian spaces. Yano Kentaro), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1955, A58, № 1, 24—32; Indagationes math., 1955, 17, № 1, 24—32 (англ.)

Риманово пространство размерности $2n$ называется почти эрмитовым, если в нем задан тензор F_i^k, удовлетворяющий условиям

$$F_i^l F_l^k = -\delta_i^k, \quad F_i^l F_k^p g_{lp} = g_{ik}.$$

Если внешний дифференциал формы $F_{ik}[dx\ dx^k]$ ($F_{ik} = F_i^l g_{lk}$) равен нулю, то пространство называется почти келеровым. Если n-мерные собственные направления оператора F_i^k (комплексно сопряженные) являются X_n-образующими, пространство называется псевдоэрмитовым. Псевдоэрмитово почти келерово пространство называется псевдокелеровым.

В почти эрмитовом пространстве можно определить три аффинных связности, требуя, чтобы тензор F_{ik} сохранялся и чтобы тензор

$$'T_{ikp} = \left(\left\{\begin{matrix} l \\ ik \end{matrix}\right\} - \Gamma_{ik}^l\right) F_{lp}$$

был антисимметричен соответственно по последним, по крайним или по первым индексам. Первая связность совпадает с введенной Лихнеровичем (реф. 1777), вторая для эрмитовых пространств совпадает со связностью, введенной Схоутеном и ван-Данцигом в 1930 г. Первая связность сохраняет тензор g_{ik} всегда, вторая и третья — только для псевдоэрмитовых пространств. В псевдокелеровых пространствах $'T_{ikp} = 0$, и все три связности совпадают с исходной римановой. А. М. Васильев

1779. О группах голономии римановых и келеровых многообразий. Лихнерович (Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes et kählériennes. Lichnerowicz A.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 33—44 (франц.)

Дается обзор основных понятий и результатов, относящихся к группам голономии римановых и келеровых пространств. Затем излагаются результаты автора (РЖМат, 1956, 735; реф. 1777). А. М. Васильев

1780. Об изометрических преобразованиях почти-келеровых многообразий. Апте (Sur les isométries des variétés presque kählériennes. Apte Madhumalati), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 63—65 (франц.)

Вещественное $2n$-мерное многообразие V_{2n} называется почти-келеровым, если на нем задана риманова метрика $ds^2 = g_{ij}\theta^i\theta^j$ и замкнутая внешняя квадратичная форма F, перестановочная с метрикой. Линейное преобразование касательного пространства, определяющее почти-комплексную структуру на V_{2n}, обозначим J. Обозначим $\hat{\Omega}^\alpha$ и $\hat{\Omega}^\alpha{}_\beta = \hat{R}^\alpha{}_{\beta,\,kl}[\theta^k\theta^l]/2$ формы кручения и кривизны индуцированной почти-келеровой связности (реф. 1777), а $\hat{\Psi}_x$ — однородную группу голономий этой связности. Рассмотрим форму $\psi = -i\Omega^\alpha{}_\alpha/2\pi$. Эта форма (второй класс Чжэня (Черна)) не зависит от выбора связности и является инвариантом многообразия.

Решается вопрос о том, когда изометрические преобразования сохраняют всю почти-келерову структуру, т. е. сохраняют форму F.

Теорема 1. Пусть V_{2n} почти-келерово многообразие. Если V_{2n} компактно, то наибольшая связная группа изометрических преобразований оставляет инвариантной почти-келерову структуру. Это же утверждение имеет место, если V_{2n} не компактно, но $\hat{\Psi}_x$ неприводима и $\psi \neq 0$.

Теорема 2. Если ξ^i вектор Киллинга преобразования, сохраняющего почти-келерову структуру, а V_{2n} компактное почти-келерово многообразие, то

$$I(\xi) = \int_{V_{2n}} \hat{R}^\alpha{}_{\alpha,\,ij}\xi^i\xi^j\, d\tau \geqslant 0$$

и из $I(\xi) = 0$ следует, что вектор $J\xi^i$ гармоничен.

Как следствие отсюда получается обобщение на почти-келеровы многообразия результатов Бохнера для келеровых многообразий. Д. В. Беклемишев

1781. Об аффинных преобразованиях компактного почти эрмитова многообразия. Апте, Лихнерович (Sur les transformations affines d'une variété presque hermitienne compacte. Apte Madhumalati, Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 3, 337—339 (франц.)

На компактном $2n$-мерном дифференцируемом многообразии V_{2n} задается почти эрмитова структура при помощи линейного преобразования касательного пространства $\mathscr{J}$ ($\mathscr{J}^2 = -E$) в каждой точке V_{2n} и римановой метрики. Из всех аффинных связностей, допустимых на V_{2n}, рассматриваются две: первая и вторая канонические связности (см. соответственно реф. 1777, Ehresmann, Libermann, C. r. Acad. sci., 1951, 232, 1281).

Авторы ставят себе задачу отыскать автоморфизмы V_{2n}, т. е. преобразования, оставляющие инвариантными почти комплексную структуру (преобразование $\mathscr{J}$) и метрику.

Доказано следующее: Наибольшая связная группа

аффинных преобразований, оставляющая инвариантной первую каноническую связность и почти комплексную структуру, совпадает с наибольшей связной группой автоморфизмов V_{2n}. Получена аналогичная теорема относительно второй связности при дополнительном требовании, чтобы ее группа голономии Ψ была неприводимой. Д. В. Беклемишев

1782. К дифференциальной геометрии комплексных структур. Фрёлихер (Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen. Frölicher Alfred), Math. Ann., 1955, **129**, № 1, 50—95 (нем.)

Для того чтобы почти комплексная структура, заданная на многообразии M_{2n} тензором a_i^k, $a_l^k a_i^l = -\delta_i^k$, была комплексной, необходимо обращение в нуль тензора $t_{ik}^l = (a_{pi}^l a_k^p - a_{pk}^l a_i^p)/2$, где $a_{ik}^l = (\partial a_i^l/\partial x^k - -\partial a_k^l/\partial x^i)/2$.

Если тензор a_i^k вещественно аналитический, условие и достаточно.

В M_{2n} существуют аффинные связности, перенесение которых сохраняет a_i^k. Для всех этих связностей t_{ik}^l является тензором кручения. Для любых двух векторных полей **a** и **b** на M_{2n}, применение скобок Пуассона дает равенство

$$J[Ja, b] + J[a, Jb] + [a, b] - [Ja, Jb] = 4t_{ik}^l a^i b^k,$$

где J — основной оператор a_i^k. Это позволяет сформулировать алгебраическое условие комплексности однородного многообразия с группой G и стационарной подгруппой H. Если $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — соответствующие алгебра и подалгебра Ли, то в $\mathfrak{g}$ должен существовать линейный оператор I, обладающий свойствами: 1) $I = 0$ на $\mathfrak{h}$; 2) I имеет инвариантное подпространство, дополняющее $\mathfrak{h}$ до $\mathfrak{g}$, на котором $I^2 = -E$; 3) для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$, $I[IX, Y] + I[X, IY] + [X, Y] - [IX, IY] \in \mathfrak{h}$. Если линейная группа изотропии $\hat{H}$ пространства связна, эти условия являются и достаточными. Доказывается, что всякое четномерное компактное групповое пространство является комплексным многообразием.

А. М. Васильев

1783. Некоторые замечания о почти комплексных многообразиях. Яно (Some remarks on almost complex manifolds. Yano Kentaro), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 268—269 (англ.)

Приводятся новые геометрические и аналитические условия комплексности почти комплексной структуры, эквивалентные уже известным (см., например, реф. 1782). А. М. Васильев

1784. О канонической эрмитовой форме комплексных однородных пространств. Кошуль (Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Koszul J. L.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 4, 562—576 (франц.)

Пусть на комплексном многообразии задана внешняя форма размерности $2n$. Если z^i, $\bar{z}^i$ — локальные координаты многообразия, форма имеет вид

$$\omega = K[dz', \ldots, dz^n, d\bar{z}', \ldots, d\bar{z}^n].$$

Тогда величины $\partial^2 \ln K/\partial z^i \partial \bar{z}^k$ являются коэффициентами эрмитовой формы h, инвариантно связанной с ω. В работе рассматривается однородное комплексное многообразие G/B с инвариантной мерой ω. Его форма h выражена через объекты, определяемые структурой пространства в алгебре Ли группы G. Доказано, что внешняя квадратичная форма, определяемая формой h, является внешним дифференциалом левоинвариантной в группе G линейной формы φ. Для невырожденности формы h необходимо и достаточно, чтобы стационарная группа B по размерности совпадала с группой всех правых сдвигов группы G, оставляющих φ инвариантной. В частности, если B полупроста, она является открытой подгруппой централизатора одночленной подгруппы группы G.

Далее рассматривается случай, когда G полупростая. При переходе к компактной форме G' группы G пространству G/B соответствует также комплексное пространство G'/B', $B' \simeq B$. Изучая изменение канонической формы при переходе от одного пространства к другому, автор установил, что число отрицательных квадратов канонического вида формы h пространства G/B равно разности между размерностью максимальной компактной подгруппы группы и размерностью B.

Рассматривая ограниченные однородные области комплексного евклидова пространства, Э. Картан показал, что их канонические формы положительно определенные, а стационарные группы компактны. Из результатов автора следует, что если группа автоморфизмов такой области полупроста, мы имеем симметрическое риманово пространство одного из типов, указанных Картаном (Cartan E., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg., 1935, **11**, 116—162). А. М. Васильев

1785. Структура комплексных пространств. Бохнер (Structure of complex spaces. Bochner S.), Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, Princeton, N. J., 1953, 189—201 (англ.)

Многообразие вещественной размерности $2n$, покрытое окрестностями, координатизированными при помощи переменных x^i, y^i, является комплексным, если преобразования от переменных $z^k = x^k + iy^k$ к таким же переменным $z^{i'}$ соседних окрестностей $z^{i'} = f^{i'}(z^k, \bar{z}^k)$ задается голоморфными функциями от z^k, т. е. $\partial f^{i'}/\partial \bar{z}^k = 0$.

Многообразие будет комплексным, если на нем существует невырожденная квадратичная форма, в каждой из окрестностей принимающая вид эрмитовой формы от dz, $d\bar{z}$, причем $\det \| \partial f^{i'}/\partial z^k \|$ нигде не обращается в нуль. Другое достаточное условие: на многообразии существует $r \geqslant n$ полей комплексных ковариантных векторов $\xi_i^{(\lambda)}$, причем ранг матрицы $\| \xi_i^{(\lambda)} \|$ всюду равен n. Чтобы многообразие было келеровым, достаточно существования r векторных полей с теми же свойствами у которых $\partial \xi_i^{(\lambda)}/\partial z^k - \partial \xi_k^{(\lambda)}/\partial z^i = 0$.

Кроме того, приводятся другие частные случаи общего правила: комплексное многообразие несет келерову метрику, если на нем существует достаточно много независимых в подходящем смысле голоморфных тензоров (относительных тензоров).

Комплексное пространство униформизуемо, если его универсальное накрывающее голоморфно эквивалентно области комплексного евклидова пространства. Высказываются следующие предположения. Келерово многообразие униформизуемо тогда и только тогда, когда его кривизна Риччи отрицательная. Если келерово многообразие униформизуемо, то всякое голоморфно вложенное в него многообразие также униформизуемо.

В последней главе намечается перенесение ряда результатов теории регулярных комплексных многообразий на многообразия с особенностями. Изложение этих вопросов должно появиться в отдельной статье.

А. М. Васильев

1786. Общая теория относительности как трехмерная неголономная геометрия Лагерра второго рода, соответствующая гравитационная теория и квантовая механика. Такасу (The general relativity as a three-dimensional non-holonomic Laguerre geometry

of the second kind, its gravitation theory and its quantum mechanics. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1953, **1**, № 1, 89—104 (англ.)

Пользуясь, с одной стороны, взаимно однозначным отображением риманова пространства n измерений V_n на n-мерное евклидово пространство E_n, при котором геодезическим кривым $\xi^i(x) = c^i \int ds = \int \frac{\omega^i}{dt}\, dt$ ($\delta_{lm} c^l c^m = 1$; $l, m = 1, \ldots, n$; δ_{lm} — символы Кронекера) V_n отвечают в E_n прямые $\xi^i = c^i s + a^i$, а неголономным декартовым координатам $d\xi^i = \omega^i_\mu(x)\, dx^\mu = \omega^i$ соответствуют в E_n декартовы координаты $d\xi^i$ и используя, с другой стороны, гомеоморфизм между E_n и пространством Лагерра L_{n-1}, при котором ориентированным гиперсферам с центром ξ^a ($a = 1, \ldots, n-1$) и радиусом $r = -i\xi^n$ в L_{n-1} соответствуют в E_n точки с декартовыми координатами ξ^i ($i = 1, \ldots, n$), можно установить отображение V_n на L_{n-1}. Это позволяет переписать основные факты геометрии G_4 общей теории относительности в терминах геометрии L_3. При этом основную роль играет следующее правило, доказываемое автором: законы в пространстве Лагерра L_3, соответствующем пространству S_4 специальной теории относительности и в пространстве G_4 общей теории относительности имеют один и тот же вид с той разницей, что законы общей теории относительности получаются из соответствующих законов специальной теории относительности при помощи замены ξ^i через $c^i \int ds = \int \omega^i_\mu(x) \frac{dx^\mu}{dt}\, dt$, а оператора $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ через оператор $\frac{\partial}{\omega^i} = \Omega^\mu_i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $(\Omega^\nu_i \omega^i_\mu = \delta^\nu_\mu,\ \Omega^\mu_i \omega^m_\mu = \delta^m_i)$.

Рассматривая основные факты релятивистской квантовой механики, геометрическим фоном которой служит пространство специальной теории, и используя указанную выше идею, автор ставит формальный вопрос о построении «общей теории относительности» для квантовой механики, основываясь на следующем принципе: «общий релятивизм» квантовой механики может быть получен из «специального релятивизма» заменой «специально релятивистского» действия cdt через «общерелятивистское» действие $dr = \varepsilon dt \left(\varepsilon = \frac{dr}{dt}\right)$.

На основании этого соображения записываются «общерелятивистские» уравнения Дирака, обобщенные уравнения Шрёдингера—Гордона, обобщенные в этом же смысле уравнения Максвелла. А. З. Петров

1787. О приближенных уравнениях теории Эйнштейна — Шредингера. Тонла (Sur les équations approchées de la théorie d'Einstein—Schrödinger. Marie-Antoinette Tonnelat), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 17, 1110—1112 (франц.)

Рассматривая основные уравнения единой теории Эйнштейна с несимметрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, симметрическая и антисимметрическая части которого суть $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$, автор в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 4864) ставит вопрос о нахождении решений уравнений поля по приближениям, исходя из разложений $\varphi_{\mu\nu} \cong \varepsilon \overset{1}{\varphi}_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \overset{2}{\varphi}_{\mu\nu} + \ldots$, $\gamma_{\mu\nu} = \overset{1}{\gamma}_{\mu\nu} + \varepsilon \overset{2}{\gamma}_{\mu\nu} + \ldots$

Выделяя симметрическую и антисимметрическую части в уравнениях, автор получает основные уравнения соответственно гравитации и электромагнитные. Рассматриваются первое и второе приближения и для них те дополнительные условия, которые ставятся в вариантах единой теории Эйнштейна—Кауфмана $\left(F_{\mu\nu} = 0,\ \text{где } -\frac{3\chi}{4} F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu,\ \Gamma_\mu = \Gamma^\rho_{\mu\rho},\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right.$ — коэффициенты связности пространства) и Шредингера ($\varphi_{\mu\nu,\rho} = 0$).

В заключение исследуется тензор Максвелла.

А. З. Петров

1788. Классификация пространств, определяемых полями тяготения, по группам движений. Петров А. З., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 181—182

Доклад на заседании Московского математического общества 10 февраля — 3 апреля 1956 г.

1789. Уравнения движения свободной частицы в предложенной автором общей теории относительности, как неголономной геометрии Лагерра в движущемся трехмерном евклидовом пространстве. Такасу (Equations of motion of a free particle in the author's general relativity as a non-holonomic Laguerre geometry realized in the moving three-dimensional cartesian space. Takasu Tsurusaburo), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 9, 814—819 (англ.)

В рамках предложенной ранее автором (реф. 1786) общей теории относительности, основанной на неголономной геометрии Лагерра, реализуемой в трехмерном евклидовом пространстве, исследуются уравнения движения свободной частицы. Геодезическим кривым 2-го порядка в V_4, дающим траектории движения в теории Эйнштейна, соответствуют теперь гомоцентрические сферические системы в трехмерной неголономной геометрии Лагерра, для которых записываются уравнения, их определяющие. Рассматривается решение Шварцшильда, случай планетарных орбит, смещение линий Фраунгофера и т. д. А. З. Петров

1790. О конформных преобразованиях в пространстве — времени релятивистской космологии. Такено (On conformal transformations in the space-time of relativistic cosmology. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1955, **4**, № 3, 141—149 (англ.)

Рассматривается тот частный случай решения уравнений Эйнштейна, когда оно задается формой $ds^2 = -F^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$, где $F = e^{g(t)} (1 + r^2/4R^2)^{-1}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, g — некоторая функция t, а $R = \text{const}$. Это пространство допускает бесконечно малые конформные преобразования. В статье находится конкретный вид этих преобразований в указанной выше системе координат и исследуется их отношение к движениям. При $1/R^2 = 0$ получается 15-членная группа конформных преобразований, содержащая при $\dot{g} = 0$ подгруппу G_{10} движений Лоренца. При $\dot{g} = \text{const}$ получается пространство-время де-Ситтера.

Доказывается, почти очевидная, теорема: Если ξ^i — вектор бесконечно малого конформного преобразования в V_n, то он выполняет ту же роль и для пространства $\bar{V}_n$, конформного V_n. Отсюда следствие: для любого конформно-евклидова V_n ($n \geqslant 3$) существует $(n+1)(n+2)/2$ линейно независимых бесконечно малых конформных преобразований. А. З. Петров

1791 К. О некоторых классах однородных пространств групп Ли. Титс (Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. Tits J.), Mém. Acad. roy. Belgique Cl. sci., 1955, **29**, № 3, 268 (франц.)

Книга состоит из четырех частей. В первой части приводятся основные сведения из теории групп и алгебр Ли и их линейных представлений. Во второй части изложены основные положения теории однородных пространств, в частности вещественного, комплексного и кватернионного проективных пространств. В третьей

части изучаются некоторые однородные пространства с полупростыми фундаментальными группами. С каждым из этих пространств связывается схема, аналогичная схеме простых корней полупростой алгебры. Зная схему пространства, можно выводить некоторые геометрические следствия.

Общая теория применяется, в частности, к изучению простых специальных групп G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Дается геометрическая интерпретация этих групп в проективном пространстве над алгеброй октав.

Четвертая часть содержит решение следующих проблем: 1. Определение всех транзитивных групп автоморфизмов вещественного, комплексного и кватернионного проективных пространств. 2. Определение всех однородных пространств, являющихся изотропными. 3. Определение всех метрических локально компактных пространств, обладающих тем свойством, что их группы изометрии транзитивны в многообразиях пар точек, удаленных друг от друга на заданное расстояние.

4. Определение всех однородных пространств, в которых фундаментальные группы действуют транзитивно на парах, тройках и т. д. точек (n раз однородные пространства). А. С. Феденко

1792 Д. Изометрическое комплексно-аналитическое вложение келеровых многообразий. Калаби (Isometric complex analytic imbedding of Kähler manifolds. Calabi Eugenio, Doct. diss., Princeton Univ., 1950), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 423 (англ.)

1793 Д. Метрическая характеристика эллиптического n-пространства. Ханкинс (Metric characterizations of elliptic n-space. Hankins Joe D., Doct. diss., Univ. Missouri, 1954). Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 1, 129 (англ.)

1794 Д. Геодезическое соответствие между римановыми пространствами. Тернок (Geodesic correspondences between Riemannian spaces. Turnock James Harold, Jr).—Doct. diss., Univ. Illinois, 1954, Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 427—429 (англ.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

1795. Об одной геометрической задаче для n-мерного симплекса. Леммлейн В. Г., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 215—218

Если $M_1M_2M_3$ — произвольный треугольник и ломаная линия $N_0N_1N_2\ldots$ определяется рекуррентным соотношением $\frac{N_{j+1}N_j}{M_{j+1}N_{j+1}} = \alpha$ ($M_{3k+r} \equiv M_r$; точки N_j, M_{j+1} и N_{j+1} коллинеарны), то треугольник $N_iN_{i+1}N_{i+2}$ при $i \to \infty$ стремится к определенному треугольнику $N_1N_2N_3$, площадь которого относится к площади $M_1M_2M_3$ как $\frac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3-1}$. (Действительное число α не принадлежит отрезку $(-2,0)$). Это хорошо известное предложение обобщается в работе на n-мерный случай. И. М. Яглом

1796. О покрытии плоского множества точек множествами меньшего диаметра. Ленц (Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers. Lenz Hanfried), Arch. Math., 1956, **7**, № 1, 34—40 (нем.)

Пусть M — плоское множество точек и $d_k(M)$ ($d'_k(M)$) — нижняя грань чисел x таких, что M можно покрыть k множествами точек (соответственно кругами) диаметра $\leqslant x$. В частности, $d_1(M)$ — диаметр множества. Очевидно, всегда $d_k(M) \leqslant d'(M)$. Устанавливаются общие оценки сверху и снизу $d_k(M)$ и $d'_k(M)$ через k и площадь M для выпуклых M. Кроме того, доказываются следующие утверждения. Если M выпукло и $d_1(M) = 1$, то $d'_3(M) \leqslant \sqrt{3}/2$, $d'_4(M) \leqslant \sqrt{2}/2$, где равенство имеет место только, если M круг. Если M — множество постоянной ширины 1, то $d_3(M) \geqslant \sqrt{3} - 1$, где равенство имеет место только для треугольника Рело. Если M выпукло и $d_1(M) = 1$, то $d'_7(M) \leqslant 1/2$. Равенство имеет место, когда M — круг ($d_7(M) = d'_7(M)$). Вопрос, является ли круг единственной экстремальной фигурой и в этом случае, остается открытым. Формулируется ряд нерешенных задач. Ю. Г. Решетняк

1797. Гармонические отображения. Фуллер (Harmonic mappings. Fuller F. B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 10, 987—991 (англ.)

Исходя из простых механических аналогий, автор вводит понятие энергии $E(f)$ отображения f одного многообразия в другое с тем, чтобы определить гармонические отображения как дающие минимальное значение $E(f)$. Именно, пусть M^p — компактное ориентируемое аналитическое многообразие с координатами $x^1, \ldots, x^p$ и аналитической метрикой g_{ij}, а N^q — второе многообразие, удовлетворяющее тем же условиям, с координатами $y', \ldots, y^q$ и метрикой $h_{\lambda\mu}$. Пусть f — отображение класса C^2 многообразия M^p в N^q; в каждой координатной окрестности M^p y^λ становятся функциями класса C^2 от x^i. Интегралу

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M h_{\lambda\mu}\Delta_1(y^\lambda, y^\mu)\,dV,$$

где $\Delta_1(y^\lambda, y^\mu) = g^{ij}y^\lambda_{,i}y^\mu_{,j}$ соответствует уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\hat{f}(x) = \Delta_2 y^\nu + \left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}\Delta_1(y^\lambda, y^\mu),$$

где $\Delta_2 y^\nu = g^{ij}y^\nu_{,ij}$ (оператор Лапласа—Бельтрами), а $\left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}$ — символ Кристоффеля в точке $f(x) \in N^q$. Гармоническим называется отображение, для которого $\hat{f}(x) = 0$.

Автор высказывает предположение, что каждый гомотопический класс отображений должен содержать по крайней мере одно гармоническое отображение, которое должно оказываться аналитическим. Отметив трудности в общем рассмотрении вопроса, проистекающие из нелинейности основных уравнений для общего случая, автор рассматривает несколько конкретных примеров. В. В. Рыжков

1798. Обобщение теоремы Сегре — Кустаанхеймо. Барлотти (Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 498—506 (итал.)

Известно, что в S_3 над полем Галуа характеристики p и порядка $q = p^h$ поверхность второго порядка содержит либо q^2+1 точек (если она не линейчатая), либо q^2+2q+1 точек (линейчатая), либо q^2+q+1 точек (конус). Показывается, что при $p \neq 2$ эти свойства характеристичны для коники в S_3, именно: совокупность q^2+1 точек, из которых никакие три не коллинеарны, представляет квадрику, совокупность q^2+2q+1 точек, обладающая тем свойством, что каждая прямая, имеющая с этой совокупностью более двух общих точек, целиком лежит в ней, представляет

линейчатую квадрику (или распадается на плоскость и прямую) и совокупность q^2+q+1 точек с тем же свойством представляет плоскость или конус второго порядка. При $p=2$ теоремы эти вообще не верны. Эти результаты — обобщение теоремы Б. Сегре, доказавшего предположение Кустаанхеймо о том, что при $p\neq 2$ в S_2 над полем Галуа характеристики p и порядка p^h каждый овал есть коника (РЖМат, 1956, 9094). В. В. Морозов

1799. О многообразии представлений линейных элементов проективной плоскости. Бомпьяни (Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo. Bompiani E.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, 19, № 5, 207—212 (итал.)

Рассматривается отображение множества элементов первого порядка E_1 проективной плоскости на V_3^6. Как было доказано Севери, это дает минимальную модель множества. Совокупность элементов E_1 с общим центром соответствует прямой g_1, принадлежащей к первой системе базы Севери. Совокупность E_1, имеющих общую прямую, соответствует прямой g_2 второй системы этой базы. Через каждую точку многообразия V_3^6 проходят две прямые g_1 и g_2, определяющие плоскость, сопряженную этой точке. Совокупности E_1, прямые которых проходят через одну точку, а центры лежат на прямой, не проходящей через эту точку, соответствует коника (кривая 2-го порядка). Совокупность линейных элементов, прямые которых проходят через одну точку, соответствует кубической линейчатой поверхности $R^3_{(1)}$, директрисой которой является прямая g_1, представляющая указанную точку, а образующими — прямые g_2, пересекающие директрису.

Почти во всех случаях автор указывает минимальную размерность плоского пространства, в которое может быть вмещен геометрический образ.

Как эти результаты, непосредственно следующие из интерпретации многообразия элементов E_1 с помощью V_3^6, так и ряд других автор получает аналитическим путем, выписывая формулы отображения в явном виде. Он получает уравнения прямых g_1 и g_2, плоскости, сопряженной с точкой, плоского пространства S_3, касательного к V_3^6, поверхностей $R^3_{(1)}$ и $R^3_{(2)}$ и целого ряда связанных с ними образов.

В конце статьи рассматривается отображение V_3^6 на его касательное S_3. В этом отображении совокупность прямых g_1 и g_2 переходит в две конгруэнции прямых, поверхности $R^3_{(1)}$ и $R^3_{(2)}$ — в две квадрики.

Н. И. Кованцов

1800. Некоторые характеристики проективных плоскостей. Ломбардо-Радиче (Su alcuni caratteri dei piani grafici. Lombardo-Radice Lucio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1955, 24, № 2, 312—345 (итал.)

Пусть S_1^n — частичная плоскость, состоящая из $n-2$ точек, лежащих на некоторой прямой, и двух точек вне этой прямой, P^n — ее полное свободное расширение (свободная плоскость), S_2^n, S_3^n, ... — частичные плоскости, возникающие в ходе построения P^n, $P^n_m = S^n_{2m-1}$.

Конфигурационным предложением на P^n степени m называется предложение, утверждающее коллинеарность трех точек из P^n, не коллинеарных в P^n, причем все эти точки лежат в P^n_m, но хотя бы одна не лежит в P^n_{m-1}. Доказывается, что существуют только четыре конфигурационных предложения на P^4 степени 3 и все они описываются.

Обозначим через $\overline{S}^n_1$ подплоскость данной плоскости П, изоморфную S^n_1, а через $\overline{S}^n_m$ — частичную плоскость, получаемую из $\overline{S}^n_1$ так же, как S^n_m из S^n_1, если построение проводить в П. Частичная плоскость $\overline{S}^n_1 \subset \Pi$ имеет степень нижней свободы h, если $\overline{S}^n_h$ изоморфно S^n_h, а $\overline{S}^n_{h+1}$ не изоморфно S^n_{h+1}. Назовем $(n-3)$-й степенью нижней свободы плоскости П число g, равное: а) 0, если в П не содержится подплоскостей, изоморфных S^n_1; б) максимуму степеней нижней свободы всех $\overline{S}^n_1 \subset \Pi$ в противном случае (возможно, $g=\infty$).

Частичная плоскость $C \subset P^n_m$ полна в P^n_m, если вместе с каждой точкой (прямой) $A \in C$ в C содержатся обе прямые (точки), послужившие для определения A в P^n_m. Назовем $\overline{C} \subset \overline{P}^n_m$ свободной частичной плоскостью степени m относительно $\overline{P}^n_1$, если: а) $\overline{C}$ изоморфно полной частичной плоскости $C \subset P^n_m$, но $C \not\subset P^n_{m-1}$; б) для точек из $\overline{C}$ выполняются лишь те коллинеации, которые имеют место в P^n. Определим $(n-3)$-ю (в подлиннике n-ю, что, по-видимому, ошибочно) степень верхней свободы плоскости П относительно $\overline{P}^n_1 \subset \Pi$ как верхнюю границу степеней свободных частичных плоскостей относительно $\overline{P}^n_1$. Верхняя граница степеней верхней свободы относительно всех $\overline{P}^n_1$ называется $(n-3)$-й (в подлиннике n-й, что, по-видимому, ошибочно) степенью верхней свободы плоскости П. Доказывается, что плоскость над $GF(p)$ имеет первую степень верхней свободы 2 $(p-1)$. Л. А. Скорняков

1801. Классы подобных матриц как обобщенные двойные отношения. Фурман (Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse. Fuhrmann Arved), Math. Z., 1955, 62, № 3, 211—240 (нем.)

Рассматривается n-мерное проективное пространство над произвольным телом K. Координаты точки $x_1,\ldots,x_{n+1}$ $(x_i \in K$, хоть одно из $x_i \neq 0)$ определены с точностью до умножения справа на произвольный $(\neq 0)$ элемент тела K и записываются в виде столбца. Координаты гиперплоскости $x^*_1,\ldots,x^*_{n+1}$ определены с точностью до умножения слева и записываются в виде строки. Условие инцидентности точки и гиперплоскости: $x^*_1 x_1+\ldots+x^*_{n+1}x_{n+1}=0$.

Линейные подпространства пространства обозначаются через V или, подробнее, через $V^{(d,\,c)}$, где d — размерность подпространства, а $c=n-1-d$ — размерность двойственного подпространства. В соответствии с этим $V^{(n,\,-1)}$ есть все пространство, а $V^{(-1,\,n)}$ — пустое подпространство.

Подпространство $V^{(d,\,c)}$ задается $(n+1)$-строчной «ковариантной координатной матрицей» $\mathfrak{M}$, столбцы которой представляют координаты $d+1$ независимых точек подпространства $V^{(d,\,c)}$. То же подпространство может быть задано «контравариантной координатной матрицей» ${}^0\mathfrak{M}$ из $c+1$ строк и $n+1$ столбцов; строки дают координаты независимых гиперплоскостей, содержащих подпространство $V^{(d,\,c)}$.

Коллинеация пространства выражается либо одновременным умножением слева всех ковариантных координатных матриц на обратимую $(n+1)$-стрбчную мат-

рицу $\mathfrak{K}$, либо умножением справа всех контравариантных координатных матриц на матрицу $\mathfrak{K}^{-1}$.

Несколько подпространств образуют «конфигурацию» $\{V_1,\ldots, V_g\}$, которая может быть записана и с помощью соответствующих координатных матриц $\{\mathfrak{M}_1,\ldots, \mathfrak{M}_g\}$ или $\{{}^0\mathfrak{M}_1,\ldots, {}^0\mathfrak{M}_g\}$. Вводятся такие обозначения: $(\alpha;\ \beta) = {}^0\mathfrak{M}_\alpha\mathfrak{M}_\beta$; $\alpha \oplus \beta$ означает, что $V_\alpha \oplus V_\beta = V^{(n,\,-1)}$ ($\oplus$ — знак прямой суммы).

Четырехчленной конфигурации $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ сопоставляется квадратная матрица $\mathfrak{A} = (1;4)^{-1}\cdot(1;3)\cdot(2,3)^{-1}\cdot(2,4)$, для существования которой необходимо и достаточно выполнение условий.

$$1 \oplus 4{,}2 \oplus 3. \qquad (1)$$

Класс $\Gamma(\mathfrak{A})$ матриц, подобных матрице $\mathfrak{A}$, и дает обобщенное двойное отношение (1,2;3,4) конфигурации $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ (аналогия с определением двойного отношения двух точек и двух гиперплоскостей); $\Gamma(\mathfrak{A})$ проективно инвариантно.

Наряду с $\mathfrak{A}$ рассматриваются и матрицы

$$\mathfrak{B} = (2;3)^{-1}\cdot(2;4)\cdot(1;4)^{-1}\cdot(1;3);\ \Gamma(\mathfrak{B}) = (2,1;4,3);$$

$$\mathfrak{C} = (3;2)^{-1}\cdot(3;1)\cdot(4;1)^{-1}\cdot(4;2);\ \Gamma(\mathfrak{C}) = (3,4;1,2);$$

$$\mathfrak{D} = (4;1)^{-1}\cdot(4;2)\cdot(3;2)^{-1}\cdot(3;1);\ \Gamma(\mathfrak{D}) = (4,3;2,1).$$

Устанавливаются следующие свойства введенного таким путем двойного отношения: при выполнении соотношений (1) двойное отношение $(1,3;2,4) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ {$\mathfrak{E}$ — единичная матрица}; если, кроме (1), справедливо по меньшей мере одно из соотношений $1 \oplus 3$, $2 \oplus 4$, то $\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\mathfrak{A})$, $\Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{C})$; если, кроме (1), имеет место хотя бы одно из соотношений $1 \oplus 2$, $3 \oplus 4$, то $\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{A})$, $\Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{B})$; наконец, если выполнены как условия (1), так и оба условия $1 \oplus 3$, $2 \oplus 4$, то $(1,2;4,3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1})$.

Далее предполагается наличие таких соотношений:

$$V_1 \cup V_2 = V^{(n,\,-1)};\ 1 \oplus 4,\ 2 \oplus 3,\ 1 \oplus 13; \qquad (2)$$

в таком и только в таком случае ковариантные матрицы конфигурации приводимы к виду

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{D}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}, \qquad (3)$$

$\mathfrak{D}$ — нулевая матрица), откуда сразу усматриваются двойные отношения: $\Gamma(\mathfrak{A}) = \Gamma(\mathfrak{B})$, $\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix}$; $\Gamma(\mathfrak{D})$ и $\Gamma(\mathfrak{A})$ вместе образуют полную систему инвариантов конфигурации (3), т. е. определяют ее с точностью до коллинеации. Последний результат может быть при наличии дополнительных условий усилен.

Рассматривается, при некоторых специальных предположениях, вопрос о том, насколько двойное отношение конфигурации $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ задает расположение подпространства V_4 по отношению к определяемому подпространствами V_1, V_2, V_3 многообразию Сегре W_{123}. (Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien, 1924, 358). При выводах используются результаты, устанавливаемые отдельно, о приведении матриц к каноническому виду над телом K.

Г. Б. Гуревич

1802. О трех комбинаторных задачах для n-мерного куба и кубической решетки. Рингель (Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter. Ringel Gerhard), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, 20, № 1—2, 10—19 (нем.)

Гамильтоновой линией графа называется связное подмножество H множества его ребер, если каждая вершина графа инцидентна двум и только двум из ребер, принадлежащих H. Пусть G_n граф, образованный ребрами n-мерной числовой решетки, K_n — граф, образованный ребрами n-мерного куба. Доказывается, что при $n = 2^k$ граф G_n можно разложить на n, а граф K_n на $n/2$ гамильтоновых линий так, чтобы каждое ребро графа принадлежало одной и только одной из них. В случае произвольного n возможность таких разложений остается открытой. Далее рассматривается вопрос о двумерной ориентированной поверхности F наименьшего рода такой, что граф K_n гомеоморфен некоторому подмножеству поверхности F. Устанавливается существование поверхности такого вида, составленной из двумерных граней куба (гамильтоновой поверхности) и доказывается, что при нечетном n совокупность двумерных граней куба можно разбить на $(n-1)/2$ гамильтоновых поверхностей так, чтобы каждая грань принадлежала одной и только одной поверхности.

Ю. Г. Решетняк

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1803. О ломаных и овалах. Эрхарт (Sur les polygones et les ovales. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 3, 332—334 (франц.)

Замкнутая ломаная называется просто скрещенной, если она получается из выпуклой путем продолжения через вершины треугольниками, стороны которых, сходящиеся в вершинах исходной ломаной, являются продолжениями ее сторон, примыкающих к этой вершине. Ломаная называется целочисленной, если каждая ее сторона проходит по крайней мере через две точки целочисленными координатами. Доказываются теоремы: Алгебраическая площадь, ограниченная целочисленной просто скрещенной ломаной Γ,

$$S = i + (p/2) + n - 1,$$

где i — алгебраическое число целочисленных точек, лежащих «внутри» ломаной, p — число точек на ломаной и n — число треугольников, которые присоединяются к выпуклой ломаной при образовании Γ.

Центр тяжести периметра овала делит любую хорду, проходящую через него в отношении, которое заключено между 1/3 и 3.

А. В. Погорелов

1804. Поправка к статье Сандгрена «О выпуклых конусах». (A correction to «On convex cones». Sandgren Lennart), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 170 (англ.)

Автор указывает, что теорема 7.2 его статьи (РЖМат, 1955, 6098) сформулирована неверно. Приводится исправленная формулировка.

Э. Г. Позняк

1805. О некоторых общих свойствах радиусов инерции плоских выпуклых фигур. Бордони (Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse. Bordoni Piero Giorgio), Atti Accad naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 238—242 (итал.)

Изучается отношение радиуса инерции ρ плоской фигуры относительно оси Oy, проходящей через центр тяжести фигуры, к расстоянию d между опорными прямыми, параллельными этой оси, в зависимости от расстояния s центра тяжести фигуры от прямой, параллельной оси Oy и проходящей посредине между опорными прямыми. Для выпуклых фигур, а также фигур, преобразуемых в выпуклые посредством «обобщенного сдвига»:

$$x' = x, \quad y' = y + f(x),$$

отношение ρ/d, при изменении контура фигуры (при постоянных d, s) имеет нижний и верхний пределы, которые представляют собой соответственно возрастающую и убывающую функции от s. Л. Л. Вербицкий

1806. Алгебраическое доказательство изопериметрического неравенства для многоугольников. Фань, Таусски, Тодд (An algebraic proof of the isoperimetric inequality for polygons. Fan Ky, Taussky Olga, Todd John), J. Wash. Acad. Sci., 1955, 45, № 11, 339—342 (англ.)

Дается чисто алгебраическое доказательство известного экстремального свойства (среди всех n-угольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный многоугольник), могущего быть выраженным неравенством

$$L^2 - 4n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} F \geqslant 0 \qquad (1)$$

(L — периметр, F — площадь многоугольника); в котором знак равенства имеет место лишь в том случае, когда многоугольник правильный. Предварительно приводятся соображения, устанавливающие, что экстремальный многоугольник должен быть выпуклым и равносторонним. Далее доказывается следующая теорема: Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любые комплексные числа и $z_{n+1} = z_1$, то

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{j+1}|^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j z_{j+1}\right), \qquad (2)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$z_j = \alpha \exp(2\pi i j/n) + \beta \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad (3)$$

(α, β — произвольные комплексные числа). Неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$(Hv, v) \geqslant 0, \qquad (4)$$

в котором $v = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ — произвольный вектор n-мерного унитарного пространства, а H — эрмитова матрица, являющаяся циркулянтной (т. е. $h_{jk} = \delta_{j-k+1}$), элементы которой $\delta : 2, -1 + i\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $0, \ldots, 0, -1 - i\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Справедливость неравенства (4) основывается на экстремальных свойствах собственных значений эрмитовых матриц. Из указанной теоремы вытекает изопериметрическое неравенство: если принять $z_1, z_2, \ldots, z_n$ за вершины многоугольника, то $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j z_{j+1}\right)$ выражает площадь многоугольника, а $n\sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{j+1}|^2$ — квадрат периметра равностороннего многоугольника; условия (3) означают, что многоугольник правильный (вписан в круг с центром в β и радиусом $|\alpha|$). А. Г. Школьник

1807. О выпуклых функциях с заданными многообразиями уровня. Фенхель (Über konvexe Funktionen mit vorgeschriebenen Niveaumannigfaltigkeiten. Fenchel Werner), Math. Z., 1956, 63, № 5, 496—506 (нем.)

Финетти поставил и обстоятельно рассмотрел следующую задачу: в плоскости x_1, x_2 задано семейство выпуклых кривых $C_t : \varphi(x_1, x_2) = t = \text{const}$, сплошь и однократно покрывающих выпуклую область G; при каких условиях кривые этого семейства являются линиями уровня некоторой выпуклой функции $f(x_1, x_2)$ (т. е. линиями $f(x_1, x_2) = \text{const}$)?

Автор рассматривает эту задачу в n-мерном случае (G — область в E^n, $C_t : \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) = t = \text{const}$ выпуклые гиперповерхности в E^n).

Даются необходимые и достаточные условия, при которых гиперповерхности C_t являются поверхностями уровня некоторой выпуклой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ заданной в G. Эти условия представляют собой ограничения, наложенные на первые и вторые производные функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Например, одно из них гласит: для каждого (x) из G, если форма $\Sigma(\partial^2\varphi/\partial x_i \partial x_j)\xi_i\xi_j$ при условии $\Sigma(\partial\varphi/\partial x_i)\xi_i = 0$ имеет ранг $r(x)$, то без указанного условия ранг формы не больше $r(x) + 1$. А. В. Погорелов

См. также: 1050, 1144, 1222, 1224, 1234, 1254, 1289, 1435, 1517

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1808. К численному решению проблемы дейтрона. Лаурикайнен, Эуранто (Contributions to the numerical treatment of the deuteron problem. Laurikainen K. V., Euranto E. K.), Turun yliopiston julkaisuja, 1955, A18, № 2, 21S) (англ.)

Рассматривается система уравнений для волновой функции основного состояния дейтрона:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \left(k^2 - b\,\frac{e^{-x}}{x}\right)\varphi_0 +$$

$$+ 2\sqrt{2}\,\gamma b\,\frac{e^{-sx}}{sx} f(sx)\,\varphi_2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{6}{x^2} - b\,\frac{e^{-x}}{x}\right)\varphi_2 +$$

$$+ \gamma b\,\frac{e^{-sx}}{sx} f(sx)\,(2\sqrt{2}\,\varphi_0 - 2\varphi_2) = 0,$$

$\varphi_i(0) = \varphi_i(\infty) = 0$, где $f(x) = 1 + (3/x) + (3/x^2)$.

Требуется при заданной энергии связи k^2 так подобрать параметры γ и b, чтобы нормированная собственная функция φ_0, φ_2 обеспечивала для квадрупольного момента дейтрона $Q = \int_0^\infty x^2(2\sqrt{2}\,\varphi_0\varphi_2 - \varphi_2^2)\,dx$ заданное значение. Предложен вариационный метод: решение должно реализовать экстремум функционала

$$\int_0^\infty \left[\varphi_0'^2 + \varphi_2'^2 + k^2\varphi_0^2 + \left(k^2 + \frac{6}{x^2}\right)\varphi_2^2\right] dx$$

при условиях

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(\varphi_0^2 + \varphi_2^2)\,dx = \text{const};$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} f(x)\,[2\sqrt{2}\,\varphi_0\varphi_2 - \varphi_2^2]\,dx = \text{const},$$

причем параметры γ и b находятся как множители Лагранжа. При численном расчете сингулярный коэффициент $f(x)$ заменяется сглаженным $\bar{f}(x) = 1 + 3\frac{1-e^{-\beta x}}{x} + 3\left(\frac{1-e^{-\beta x}}{x}\right)^2$, функции сравнения берутся в виде:

$$\varphi_0 = e^{-kx}(1-e^{-x})\sum_{i=0}^{m} h_i e^{-ix},$$

$$\varphi_2 = e^{-kx}(k^2+3k)\frac{1-e^{-x}}{2} + 3\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 (s-e^{-x})^3 \sum_{j=0}^{h} H_j e^{-jx}$$

Приведены некоторые численные данные. Законность предложенного метода не обсуждается.

Л. Д. Фаддеев

1809. Замечания о применении вариационного метода в проблеме дейтрона. Лаурикайнен (Notes on a variational method in the deuteron problem. Laurikainen K. V.), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. **A1**, № 208, 7 pp. (англ.)

Указанная выше (реф. 1808) вариационная задача решается методом Ритца. Взяв по три члена в разложениях по координатным функциям (удовлетворяющим краевым условиям) для φ_0 и φ_2, автор получает погрешность в собственных значениях порядка 1%. Ввиду громоздкости вычислений указывается на целесообразность применения электронных вычислительных машин.

В. С. Саульев

1810. Численное решение уравнения Шредингера для центральных полей. Рубенштейн, Хьюз, Мачлуп (Numerical solution of the Schroedinger equation for central fields. Rubenstein R. A., Huse Marjorie, Machlup Stefan), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 53, 30—31 (англ.)

Рассматривается программа, составленная для решения на машине ИЛЛИАК уравнения Шредингера

$$u''(r) - [l(l+1)/r^2 + 2V(r) - E]u = 0$$

с граничным условием $u(0) = 0$, где $u(r)$ ограничена для любого потенциала $V(r)$. По этой программе можно вообще интегрировать уравнение вида $u''(r) - g(r)u(r) = q(r)$, где $q(r)$ исчезает в нуле и на бесконечности, $r^2 g(r)$ ограничена в нуле и $g(r)$ ограничена для больших r.

Особенностью программы является использование метода интегрирования Нумерова: после введения новой зависимой переменной $y = u - (h^2/12)(gu + q)$ вычисления проводятся по формуле

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 \frac{g_n y_n + q_n}{1 - \frac{1}{12}h^2 g_n} - \frac{1}{240}\delta^6 y_n.$$

Программа в статье не приводится.

Е. Н. Деканосидзе

1811. К вопросу о границе применимости теоремы академика С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным дифференциальным уравнениям высших порядков. Кащеев Н. А., Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 53—56

Дано линейное уравнение порядка $n \geqslant 2$ вида

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

где $a_k(x)$ и $f(x)$ — функции, непрерывные в $(-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant +\infty)$, и начальные условия

$$x_0,\ y^0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Пусть найдена какая-нибудь n раз непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, удовлетворяющая (2) и вдоль которой выполняется неравенство $L(u(x)) - f(x) > 0$.

Какова граница тех значений $x > x_0$, для которых имеет место неравенство $u(x) > y(x)$, где $y(x)$ — интеграл уравнения (1), удовлетворяющий (2)? Ответ на этот вопрос дает теорема: Границей применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к уравнению (1) будет точная верхняя грань тех значений $X > x_0$, для которых функция Коши $\varphi(x, \alpha)$ остается неотрицательной в области $x_0 < \alpha \leqslant x \leqslant X$.

Ю. Ф. Харкеевич

1812. Оценка погрешности приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Лозинский С. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 58—59

1813. О разностном аналоге функции Грина для оператора Лапласа. Люстерник Л. А., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 1, 43—53

Рассматривается оператор Лапласа в криволинейных координатах (ξ, η)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\beta\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

в единичном параллелограмме R, $0 \leqslant \xi,\ \eta \leqslant 1$. Площадь R считается равной 1. Наряду с оператором Лапласа рассматриваются произвольные его сеточные аппроксимации

$$\Delta_h u(\xi, \eta) = \frac{1}{Mh^2}\sum C_{rs}[u(\xi + rh, \eta + sh) + u(\xi - rh, \eta - sh) - 2u(\xi, \eta)],$$

где r, s пробегают конечное число целых значений, причем $\sum C_{rs} = 1$, $C_{-r,-s} = C_{r,s}$, $C_{rs} > 0$, $h > 0$, $M > 0$.

Числа C_{rs} и M удовлетворяют условиям:

$$\alpha = \frac{1}{M}\sum C_{rs} r^2, \quad \beta = \frac{1}{M}\sum C_{rs} rs,$$

$$\gamma = \frac{1}{M}\sum C_{rs} s^2.$$

Строится функция $g_h(A, B) = -\frac{\xi^2}{2\alpha} + \sum{}' \frac{v_{kl}(B)}{\lambda_h(k, l)}$, играющая роль разностного аналога функции Грина. Здесь A, B — точки параллелограмма R, $v_{kl}(\xi, \eta) = \exp[\pi i(k\xi + l\eta)]$ суть собственные функции операторов Δ и Δ_h. Величина $\lambda_h(k, l)$ определяется равенством $\Delta_h v_{kl}(\xi, \eta) = -\lambda_h(k, l)v_{kl}(\xi, \eta)$.

Знак Σ' означает, что сумма берется для $4n^2 - 1$ пар индексов k, l, удовлетворяющих условиям: $-n \leqslant k$, $l < n$, $k^2 + l^2 > 0$, где $n = 1/2h$. Имеем

$$\Delta_h g_h(A, B) = \begin{cases} -\frac{1}{h^2}, & A = B, \\ 0, & A \neq B. \end{cases}$$

Для функции $g_h(A, B)$ доказывается равенство

$$g_h(A, B) = -\frac{2}{\pi}\ln \overline{AB} + O(1),$$

где $O(1)$ — величина, модуль которой ограничен константой, не зависящей от h, ξ, η.

Рассматривается область $Q \subset R$. Пусть A — внутренняя точка Q. В области Q строится функция $f_h(B) = g_h(A, B)_Q = g_h(A, B) - v_h(B)$, где $v_h(A, B) = g_h(A, B)$ в $R - Q$ и h — гармоническая в Q. Рассматривается обычная функция Грина $f(B) = g(A, B)_Q$, определяется условиями: $f(B) = 0$ на границе Q, $f(B)$ непрерывна в $\overline{Q}$ и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f(B) = 0$ в Q при $A \neq B$, в точке A функция $f(B)$ имеет логарифмическую особенность $f(B) = g(A, B)_Q = -\frac{2}{\pi} \ln \overline{AB} + O(1)$. Обозначим через S_ρ круг радиуса ρ с центром в точке A. Доказана теорема: Для любого $\rho > 0$ при $h \to 0$ функции $f_n(B)$ стремятся к $f(B)$ равномерно в $Q - S_\rho$. А. И. Кулешов

1814. О решении методом сеток простейшей смешанной задачи матричного телеграфного уравнения. Бразма Н. А., Latvijas PSR Zinatņu Akad. Vēstis. Изд. АН ЛатвССР, 1956, № 3 (104), 133—138 (рез. латыш.)

Излагается предварительный результат автора по обоснованию применения метода сеток для решения матричного телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - \mathbf{A}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{A}_3 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ — данные переменные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 1$, а $\mathbf{f}$ — данная колонная матрица того же порядка. Элементы матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ предполагаются непрерывными функциями от x и t в области P изменения аргументов $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ $(0 < l < \infty, 0 < T < \infty)$. Предполагается, кроме того, что матрица A_1 допускает приводимость к диагональному виду с положительными диагональными элементами. Неизвестной является колонная матрица $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$.

Доказывается единственность и существование обобщенного (в смысле О. А. Ладыженской) решения уравнения (1) при граничных $\mathbf{u}(0, t) = 0$, $\mathbf{u}(l, t) = 0$ и начальных условиях $\mathbf{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\mathbf{u}_t'(x, 0) = \psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, причем при доказательстве существования матрицы φ, ψ и $f(x, t)$ предполагаются сначала непрерывными, а затем доказательство переносится на случай менее гладких матриц. Ю. Ф. Харкеевич

1815. О приближенном решении задачи Коши. Микеладзе Ш. Е., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 2, 245—249

Исследуется приближенное решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = F\left(t, x_1, \ldots, x_p, u, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}\right) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(0, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \varphi_k(x_1, \ldots, x_p) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (2)$$

где $\alpha_0 < n$, $m \leqslant n$.

Рассматривая решение u (существование и единственность достаточно гладкого решения задачи (1), (2) предполагается) как функцию от t, автор строит для нее выражение, аналогичное выражению (9) § 135 (РЖМат, 1955, 1974К) для функции одного переменного. Построенная таким путем система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^k u(rh, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^k} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(rh)^\lambda}{\lambda!} \varphi_{k+\lambda}(x_1, \ldots, x_p) + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \int_0^r (r-t)^{n-k-1} F\left(th, x_1, \ldots, x_p, u, \ldots, \frac{\partial^m u(th, x_1, \ldots, x_p)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}\right) dt,$$

справедливая для любого целого r, вместе с квадратурными формулами замкнутого и незамкнутого типов и соответствующими формулами численного дифференцирования удобна, по утверждению автора, для численного интегрирования задачи (1), (2).

Отдельно рассматривается частный случай волнового уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \Delta u(t, x_1, \ldots, x_p)$. В. К. Саульев

1816. Ошибки округления в неявных конечноразностных методах. Митчелл (Round-off errors in implicit finite difference methods. Mitchell A. R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1956, 9, № 1, 111—121 (англ.)

Для уравнения теплопроводности и волнового уравнения с двумя независимыми переменными и соответствующими граничными условиями рассматриваются симметричные и несимметричные неявные конечноразностные замены, включающие переменный параметр a и переменное отношение шагов s, и получены выражения для ошибок округления. Показано, что устойчивые «перевернутые» конечноразностные аппроксимации (четыре точки для уравнения теплопроводности и пять точек для волнового уравнения) приводят к минимальным ошибкам округления.

В работе автор развивает свои более ранние идеи (РЖМат, 1955, 6103). Н. Я. Лященко

1817. Условия сходимости и порядок ошибки при решении задачи Коши для одного линейного уравнения первого порядка методом конечных разностей. Бахвалов Н. С., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 2, 279—283

Рассматривается решение уравнения

$$u_t' + a(t, x) u_x' - b(t, x) u = 0 \qquad (1)$$

при начальных условиях $u|_{t=0} = u_0(x)$. Приближенное решение v находится при помощи разностной схемы:

$$\frac{v_{n+1,m} - v_{n,m}}{h} + a_{n,m} \frac{v_{n,m} - v_{n,m-1}}{l} - b_{n,m} v_{n,m} = 0, \qquad (2)$$

где $v_{n,m}$, $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ — значения функций $v(t, x)$, $a(t, x)$, $b(t, x)$ в точках nh, ml (h и l — шаги интегрирования),

Уравнение (2) определяет значение $v_{n+1,m}$ через значения $v_{n,m}$ и $v_{n,m-1}$; $v_{0m} = u_0(ml)$.

Известны доказательства сходимости решения (2) к решению уравнения (1) при условии гладкости коэффициентов уравнения (1) (Р. Курант, И. Г. Петровский). В данной работе доказывается сходимость процесса к обобщенному в смысле С. Л. Соболева решению без требования гладкости коэффициентов уравнения (1).

Пусть (X, T) — точка непрерывности решения уравнения (1). Тогда при условиях: а) $0 \leqslant a(t, x)$, $h/l \leqslant 1$ в области, для которой справедливы соотношения $tX \leqslant xT$, $x \leqslant X$, $t \geqslant 0$; б) $|b(t, x)| \leqslant B < +\infty$, доказывается сходимость решения уравнения (2) к решению уравнения (1) в точке (X, T). Приводится главный член ошибки и порядок ошибки в различных точках. А. Н. Иванова

1818. Решение смешанных задач теории упругости методом сеток. Длугач (Розвязання змішаних задач теорії пружності методом сіток. Длугач М. Й.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 6, 451—455 (укр.; рез. русс.)

1819. Приближенное решение уравнения теплопроводности. Сегал Б. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 196

1820. Решение основной математической задачи фильтрации газированной нефти. Халилов З. И. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 214

1821. О некоторых приближенных методах решения уравнений в частных производных. Благовещенский Ю. В. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 192

1822. О приближенном решении краевых задач для уравнений Пуассона (Лапласа) методом склеивания. Шаманский В. Е. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 197

1823. Решение краевых задач методами последовательных шагов. Гарвик (The solution of boundary-value problems by step by step methods. Garwick Jan V.), Arch. math. og naturvidensk., 1955, **52**, № 3—4, 95—161 (англ.)

Излагаются способы, посредством которых численные методы решения задач с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть применены для решения краевых задач. Рассматриваемые способы применяются также для решения краевых задач для уравнений с частными производными второго порядка, если на границе задана нормальная производная, и для уравнений четвертого порядка.

В простейшем случае способ состоит в следующем. Система алгебраических уравнений, к которым приводится краевая задача, имеет вид

$$y_{k+1} = A_k y_k + B_k y_{k-1} + C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (1)$$

где A_k, B_k, C_k заданы, а y_0 и y_n предполагаются известными. Необходимо найти y_1, при котором полученное значение y_n из (1) совпадало бы с y_n заданным. Обозначая через β_k решения (1) при y_1 произвольном, а через α_k решения (1) при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $C_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, имеем

$$y_k = \alpha_k y_1 + \beta_k. \qquad (2)$$

Обозначая через a_k значения y_k, полученные из (1) при $a_0 = y_0$ и α_1 произвольном, получим $a_n = \alpha_n a_1 + \beta_n$. Отсюда и из (2) при $k = n$ находим $y_1 = a_1 + (y_n - a_n)/\alpha_n$.

Предлагается способ вычисления поправок к y_k, если известны погрешности, с которыми заданы A_k, B_k и C_k. Далее этот способ обобщается на системы вида

$$y_{k+1} = \sum_{r=0}^{m-1} A_{k,r} y_{k-r} + C_k, \ (k = m-1, m, \ldots, n-1),$$

где m значений y_k известны или определяются из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Для определения собственных значений автор использует изложенный способ и метод Ньютона для определения корней уравнения применительно к одному из граничных условий.

Излагается прием последовательных приближений для решения краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагая известным неточное решение задачи для поправки, автор составляет линейное уравнение. Имеются числовые примеры. Библ. 8 назв. Ф. С. Лось

1824. О численном решении эллиптических разностных уравнений. Шелдон (On the numerical solution of elliptic difference equations. Sheldon John W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 51, 101—112 (англ.)

Исследуется сходимость одного итерационного метода, пригодного для решения некоторых систем линейных алгебраических уравнений, к числу которых относятся и уравнения, получающиеся при решении уравнения Лапласа по методу конечных разностей. Полученные результаты применяются к одномерному уравнению Лапласа, делаются некоторые замечания о решении многомерных проблем. С. Г. Кислицын

1825. Новый метод вычисления частных производных от корней вековых уравнений по параметрам. Ковалев И. Ф., Маянц Л. С., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 2, 175—178

Предлагаемый метод основан на том, что всякий корень векового уравнения

$$|W - \lambda E| = 0 \qquad (1)$$

рассматривается как неявная функция параметров t_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, от которых зависят элементы матрицы W. Полагая $\varphi(\lambda_i, t_j) = |W - \lambda_i E| = 0$, где λ_i — любой однократный корень уравнения (1), после преобразований находим:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} = \frac{\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial W}{\partial t_j} c\widetilde{A}^{(i)}\right)}{\mathrm{Sp}\,(c\widetilde{A}^{(i)})},$$

где $\widetilde{A}^{(i)}$ — матрица, получаемая транспонированием союзной матрицы по отношению к матрице $W - \lambda_i E$, c — произвольное число, отличное от нуля. Дается схема вычисления матрицы $\widetilde{A}^{(i)}$, основанная на известной идее окаймления. Предложенный метод распространяется на уравнение $|W - \lambda K| = 0$, где K — квадратная матрица. Н. К. Васильева

1826. Замечания о методах Трефтца и Ритца. Морэн К., Бюл. Польской АН, 1955, отд. 3, **3**, № 11, 569—573

В случае первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических дифференциальных уравнений указываются два варианта приближенного осуществления процедуры метода ортогональных проекций. Отмечается, что один из них совпадает с вариационным методом Ритца, а другой — с методом Трефтца. М. Ш. Бирман

1827. Новые оценки погрешностей для различных итерационных методов. Шрёдер (Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 5—6, 168—181 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

На основе рассмотренного автором ранее абстрактного метода итераций $u_{n+1} = Tu_n$ выводятся улучшенные оценки погрешностей. Предлагается четыре метода оценки погрешностей для различных задач. Указано, какой из методов следует применять в зависимости от вида систем линейных и нелинейных уравнений. Возможность оценки погрешности для краевой задачи в случае обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрена с векторной и функциональной точек зрения. Проведена оценка погрешности для задачи с начальными условиями.

Для каждого случая приведен пример. Библ. 9 назв. М. А. Дмитриева

1828. О приближенном решении линейных краевых задач и оценки погрешности. Слободянский М. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 197

1829. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Софронов И. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 102—103

1830. Одно замечание о методе Ньютона для решения функциональных нелинейных уравнений. Гуан Чжао-чжи (關於解函數方程微牛頓方法的一點註記. 關肇直), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 2, 290—295 (кит.)

Расширение на банахово пространство предложенного Коллатцом (РЖМат, 1955, 2404) метода Ньютона в комплексном пространстве. Лим Рюн-чиль

1831. Метод Галеркина и его обоснование. Польский Н. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 195—196

1832. Интерполяция и экстраполяция на основе способа наименьших квадратов. Аран (Interpolation et extrapolation basées sur la méthode des moindres carrés. Arend S.), Publs scient. et techn. Ministère air, 1955, N. T., № 52, 1—8 (франц.)

См. РЖМат, 1956, 7662.

1833. Квадратурные формулы для регулярной функции. Микеладзе Ш. Е., Сообщ. АН ГрузССР, 1956, **17**, № 4, 289—296

Пусть $f(z)$ — регулярная функция в области G комплексной плоскости z. Для интеграла вдоль отрезка, принадлежащего этой области,

$$\int_{a+Ht_\alpha}^{a+Ht_\beta} f(z)\,dz, \qquad (1)$$

исходя из интерполяционной формулы Лагранжа с узлами $(a+t_\nu H)$, принадлежащими области G, строится общая квадратурная формула

$$\int_{a+Ht_\alpha}^{a+Ht_\beta} f(z)\,dz = H\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu f(a+t_\nu H) + R_n, \qquad (2)$$

точная для всех многочленов степени $\leqslant n$.

Из формулы (2) получается ряд ранее известных формул с фиксированными узлами. Выводится формула с тремя вещественными узлами $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$ для интеграла по отрезку $[0,\ 0{,}1+i0{,}1]$.

Для отрезка вещественной оси $[-1,\ +1]$ из формулы (2) получается квадратурная формула

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \mathrm{Re}\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu f(t_\nu). \qquad (3)$$

Рассматривается случай формулы (3), когда $A_0=0$, $A_\nu=1/n$, а $z_\nu=t_\nu$ — узлы Чебышева. Приводится формула для $n=10$, когда, как известно, не все узлы вещественны. Эта формула применяется для вычисления интеграла $\int_{-1}^{+1} e^{-x^3}\,dx$. Полученный результат дает пять верных знаков.

Выбирая в качестве интерполяционных узлов точки, лежащие в вершинах правильных многоугольников с радиусами описанных кругов $\rho_\lambda=\sqrt[m_\lambda]{|a_\lambda|}$ и в центре: $z_0=a$, $z_{\nu,\lambda}=a+Ht_{\nu,\lambda}$, где $t_{1,\lambda}$, $t_{2,\lambda}$, ..., $t_{m_\lambda,\lambda}$ — корни уравнения $t^{m_\lambda}+a_\lambda=0$, автор получает новые квадратурные формулы типа (2). В случае $n=1$, $\lambda=1$, $m_1=m$, $\alpha_1=1$, $t_\alpha=-1$, $t_\beta=+1$ показывается, что $A_\nu\to 0$ при $m\to\infty$.

Рассматривается другой класс формул типа (2) — формул с вещественными коэффициентами. Приводится квадратурная формула с вещественными коэффициентами, узлы которой есть корни уравнения $t(t^4-1)\times(t^4-16)=0$, точная для полиномов первых девяти степеней. А. Н. Иванова

1834. Новый метод приближенного вычисления кратных интегралов. Сюй Ли-чжи (重積分近似計算的一個新方法. I. 徐利治), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 51—65 (кит.; рез. англ.)

Приближенно вычисляются кратные интегралы вида

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\,dxdy,\ \iint_S g(r,\theta)\,dS,$$

где $f(x,y)$, $g(r,\theta)$ — непрерывные функции, (r,θ) — полярные координаты, S — круг: $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x,y)-f(x',y)|\leqslant A|x-x'|$, то для всякого целого положительного числа $N\geqslant 2$ имеет место

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy-\int_0^1 f(x,<Nx>)\,dx\right|\leqslant 2A/N, \qquad (1)$$

где $\langle y\rangle=y-[y]$, $[y]$ — целая часть y. Пусть $F_n[\varphi]=\sum_{k=1}^{k_n} C_k^{(n)}\varphi(x_k^{(n)})$ $(n=1,2,\ldots)$, где коэффициенты $C_k^{(n)}$ выбраны так, что для многочлена $\varphi(x)$ степени меньше n справедливо равенство $F_n[\varphi]=\int_0^1\varphi(x)dx$ и удовлетворяются условия $\sum_{k=1}^{k_n}|C_k^{(n)}|\leqslant\mathrm{const}$.

Тогда, исходя из (1) для всякой непрерывной функции, удовлетворяющей условию $f(x,0)=f(x,1)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, справедливо

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f dxdy-\lim_n\sum C_k^{(n)}f(x_k^{(n)},<Nx_k^{(n)}>)\right|\leqslant 2A/N$$

для любого целого числа $N\geqslant 2$.

Аналогичное неравенство выводится для приближенного вычисления интеграла $\iint_S g(r,\theta)\,dS$. Лим Рюн-чиль

1835. Опыты по вычислению кратных интегралов методом Монте-Карло. Дейвис, Рабинович (Some Monte Carlo experiments in computing multiple integrals. Davis P., Rabinowitz P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 53, 1—8 (англ.)

Отмечая большой объем теоретического материала по методам Монте-Карло, появившегося за последние пять лет, и незначительное количество экспериментальных работ, авторы описывают вычисление объемов n-мерных гиперсфер $(n=2,\ 3,\ \ldots,\ 12)$, заданных неравенством $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$, и определенных интегралов на машине СЕАК методом Монте-Карло.

Вычисление объема n-мерной гиперсферы производится следующим образом. Вводится величина $v_n=\pi^{n/2}/[n2^{n-1}\Gamma(n/2)]$, являющаяся «нормализованным объемом» и равная отношению объема $V_n=\frac{2}{n}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ гиперсферы к объему гиперкуба, заданного неравенством $-1\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots n)$. Затем при помощи последовательности псевдослучайных чисел, вычисляемых в машине, выбирается последовательность точек $P_1P_2,\ldots,$ принадлежащих гиперкубу, и определяется соответствующая доля точек, принадлежащих гиперсфере. Применяются два известных ранее способа получения псевдослучайных последовательностей:

$$u_{j+1}=2^{-42}v_j,\ v_{j+1}=5^{17}v_j\ (\mathrm{mod}\ 2^{42}), \qquad (\mathrm{I})$$

и где $v_0=1$,

$$u_{j+1}=(u_j+u_{j-1})\ (\mathrm{mod}4), \qquad (\mathrm{II})$$

где u_0, $u_1 \leqslant 4$. Числа последовательности (II) перемешиваются шагами длиной 1, 2 или 3 в зависимости от того, была ли последняя цифра последнего числа сравнима с 0, 1 или 2 по модулю 3. Использовались две модификации этого метода: первая — с начальными значениями $u_0 = 0$ и $u_1 = 2^{-42}$ — метод II и вторая — с начальными значениями $u_0 = \pi$ и $u_1 = 5^{17} \cdot 2^{-42}$ — метод II′. Оказалось, что метод II иногда давал сходимость к неправильному результату, а метод II′ обеспечивал вычисления не хуже, чем метод I.

Приводятся таблицы, иллюстрирующие, вычисления нормализованных объемов методами I, II и II′ для случаев $n = 2 - 12$; $2 - 6$ и $2 - 9$ соответственно, и обсуждается точность вычислений. Время, потребное для вычисления v_n по методу I, определяется по формуле $\tau = 2nN\mu$, где N — число точек, а μ — время умножения машины. Для случая $n = 12$ и $N = 65536$ оно равно $1\ ^1/_2$ часа работы машины СЕАК. Отмечается, что способ II представляет интерес, так как он позволяет использовать операцию сложения для получения псевдослучайных последовательностей, но он ненадежен ввиду очевидной зависимости от начальных данных, и не рекомендуется применять его для вычисления кратных интегралов,

Вычисление кратных интегралов производится по формуле

$$\int_V f(P)\,dv = V/N \sum_{j=1}^{N} f(P_j).$$

Для интегрирования по n-мерному пространству используются точки P_j с координатами $[j\xi_1], [j\xi_2], \ldots, [j\xi_n]$, где ξ_i — n линейнонезависимых иррациональных чисел. Приведен пример вычисления интеграла $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x_1x_2x_3x_4} \cdot dx_1dx_2dx_3dx_4$, где $\xi_1 = \sqrt{2}/2$, $\xi_2 = \sqrt{3}$, $\xi_3 = \sqrt{6}/3$ и $\xi_4 = \sqrt{10}$, при помощи псевдослучайной последовательности (I). Для иллюстрации быстроты сходимости в зависимости от выбора псевдослучайной последовательности и для подтверждения теоретически определяемой величины ошибки приводятся данные о вычислении интеграла $\int_0^1 x dx$ при помощи псевдослучайных последовательностей (I) и $u_j = [j\sqrt{2}/2]$, где $[x]$ — дробная часть x.

Отмечается хорошее совпадение экспериментального значения ошибки с теоретическим для обоих случаев.

В. Я. Евфанов

1836. Формула для определения интеграла ошибок Гаусса. Энгвалль (En formel för beräkning av Gauss'felintegral. Engvall Albert), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 40—41 (швед.)

Рассматривается приближенный способ вычисления интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

1837. Приближенное решение прямой геодезической задачи. Бахвалов С. В., Жидков Н. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 138—140

1838. Линейные уравнения. Примеры приложений, методов решения и применения перфораторных машин. Кнёдель (Lineare Gleichungen. Beispiele aus den Anwendungen, Lösungsmethoden, Lochkartenverfahren. Knödel W.), MTW — Mitt., 1956, **3**, № 3, 113—120 (нем.)

Перечисляются некоторые технические задачи, приводящие к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений, и дается сравнительная оценка метода последовательных исключений (Гаусса и метода итераций. Затем рассматривается вопрос о выгодности применения того или другого в случае решения на электронных цифровых машинах двух типов: с оперативной памятью большой емкости, для 2500 и более чисел (магнитная лента, магнитный барабан, ферритовые сердечники), и с оперативной памятью малой емкости, порядка 50 чисел (реле или электронно-лучевые трубки).

Машины первого типа обладают тем преимуществом, что все коэффициенты системы уравнений с 50 и более неизвестными можно сразу ввести в оперативную память, после чего решение может быть быстро получено обоими способами, но обычно предпочитается метод итераций, ибо при этом упрощается программирование.

Машины второго типа выгоднее применять для решения методом Гаусса. При этом усложняется программирование, но зато может быть достигнуто сокращение времени, хотя оно все же значительно превышает время, затрачиваемое на решение машинами первого типа. Рассмотрена одна из возможных схем решения на машинах второго типа.

А. Б. Штыкан

1839. Ошибки округления в решении линейных алгебраических систем. Блан, Линигер (Erreurs de chute dans la résolution de systèmes algébriques linéaires. Blanc Ch., Liniger W.), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 4, 257—264 (франц.)

Дается более точный способ решения большого числа алгебраических уравнений, позволяющий учитывать ошибки округлений результатов элементарных вычислений. Автор предлагает округлять лишь конечные результаты. Предполагается, что если результаты округленных вычислений содержат m десятичных знаков, то ошибки округлений равнораспределены в интервале $\left(-\frac{1}{2}\cdot 10^{-m}, \frac{1}{2}\cdot 10^{-m}\right)$. Предлагаемая схема может применяться при решении систем нормальных уравнений, доставляемых способом наименьших квадратов, а также и систем конечноразностных линейных уравнений.

Ю. Ф. Харкеевич

1840. Математика в производственной экономике. Пихлер (Mathematik in der Betriebswirtschaft. Pichler O.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 3, 105—112 (нем.)

Элементарные методы линейной алгебры применяются для проведения некоторых расчетов в области экономики производства.

Все виды потребляемых и производимых «производственных мощностей» (сырье, рабочая сила, выпускаемая продукция и др.), взятые в штучном выражении, принимаются за компоненты вектора мощности производства. Такие векторы строятся для производства в целом $\mathfrak{l}$ и для его составных частей $\mathfrak{l}_k$

$$\mathfrak{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{l}_k = \begin{bmatrix} l_{1k} \\ \vdots \\ l_{mk} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем, очевидно: $\mathfrak{l} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{l}_k$.

Прибыль от производства (соответственно от его частей) определяется по формуле

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{m} p_i l_i,$$

где p_i — цена за единицу соответствующей мощности.

Если $\mathfrak{p}' = (p_1, \ldots, p_m)$ — вектор цен, то $\mathfrak{G} = \mathfrak{p}'\mathfrak{l}$, т.е. прибыль выражается как произведение векторов.

Составляется формула для подсчета себестоимости продукции

$$= -\mathfrak{p}_a \mathfrak{A} \mathfrak{F}^{-1}, \qquad (1)$$

где p_a — вектор, результирующий те компоненты вектора цен, которые соответствуют потребляемым производством мощностям, $F = \{f_{ij}\}$ и $U = \{a_{ij}\}$ — матрицы, $f_{11}, \ldots, f_{kn}$ — продукция различных видов, выпускаемая отдельными частями производства, в штучном выражении, $a_{11}, \ldots, a_{rn}$ — различные виды мощностей, потребляемых отдельными частями производства, в штучном выражении. Если матрица $\mathfrak{F}$ неособенная, равенство (1) дает единственное значение себестоимости.

Далее составляется «основное равенство хода производства» $I = b \cdot \mathfrak{F}^*$, где матрица $\mathfrak{w} = \{w_{ij}\}$ в качестве элементов w_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет числа, пропорциональные количествам различных мощностей, участвующих в отдельных частях производства, а матрица

$$\mathfrak{d}^* = \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{d}_n \end{bmatrix}$$

содержит векторы $\mathfrak{d}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, составляющие которых являются некоторыми параметрами соответствующих частей производства.

Рассмотрен простейший числовой пример, на котором иллюстрируется применение выведенных формул.

М. Л. Платонов

1841. О некоторых приемах приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов положительно определенной матрицы. Красносельский М. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 151—158

Предлагаются некоторые приемы приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов положительно определенной симметрической матрицы n-го порядка. Эти приемы являются аналитическим оформлением «геометрических» методов построения последовательностей точек x_k $(k = 0, 1, \ldots)$ на эллипсоиде $(Ax, x) = 1$, сходящихся к концу одной из полуосей этого эллипсоида. Рассматривается метод, по существу совпадающий с методом наискорейшего спуска Л. В. Канторовича. Очередное приближение x_{k+1} ищется как некоторая точка сечения эллипсоида $(Ax, x) = 1$ плоскостью, проходящей через вектора x_k и x_{k+1}. Для $(k+1)$-го приближения вектора e_1, соответствующего наибольшему собственному значению λ, получается $x_{k+1} = (Ay, y)^{-\frac{1}{2}} y$, где $y = x_k - \varepsilon A x_k$, а ε — наибольший корень уравнения $\varepsilon^2 (a_2^2 - a_1 a_3) - \varepsilon (a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_1^2 - a_0 a_2 = 0$, а $a_i = (A^i x_k, x_n)$. Рассмотренный прием применим и к вычислению e_n.

Рассматривается также итерационный процесс, основанный на идее методов типа Галеркина. Каждый вектор x_k определяется как собственный вектор оператора $P_k A$, где P_k — оператор проектирования на некоторое пространство Π_k, которое строится по предыдущему приближению.

Все предложенные приемы могут быть применены и в случае, если A — бесконечномерная матрица.

Изложенные приемы в работе подробно не исследуются и предлагаются автором для подробного анализа.

А. Н. Иванова

1842. Влияние систематических ошибок на результаты уравновешивания. Александренко А. И., Тр. Новосибир. инж.-строит. ин-та, 1955, **5**, 159—168

Исследуется вопрос о влиянии на определяемые аргументы систематической ошибки, допущенной при измерении функций этих аргументов. Получены практически полезные результаты.

Ю. Ф. Харкеевич

1843. О приближенном прямолинейном движении, получаемом при помощи симметричных шарнирных четырехзвенников. Вундерлих (Zur angenäherten Geradführung durch symmetrische Gelenkvierecke. Wunderlich W.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 3—4, 103—110 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Выведены формулы, определяющие соотношение размеров звеньев одинарного и сдвоенного симметричных шарнирных четырехзвенников, при помощи которых может быть реализована приближенная прямолинейная траектория. При помощи одинарного четырехзвенника получается траектория, часть которой заключена между двумя параллельными прямыми и имеет три точки касания с одной из них и две точки касания с другой. Для сдвоенного четырехзвенника найдены условия получения замкнутой самопересекающейся траектории, имеющей три точки касания с каждой из параллельных прямых, между которыми она заключена.

Выводы автора основаны на исследованиях П. Л. Чебышева, но более элементарны и наглядны. Применение формул и выбор требуемых соотношений облегчаются составленными автором номограммами.

А. Б. Штыкан

1844. Стохастические численные методы. Дупач (Stochastické početní methody. Dupač Václav), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 1, 55—68 (чеш.; рез. русс., англ.)

Рассматривается применение методов Монте-Карло в численном анализе. Сущность этого применения объясняется на классической задаче о вычислении числа π путем подсчета математического ожидания частоты случаев пересечения отрезком длины a пучка параллельных прямых, проведенных на расстоянии a друг от друга. Затем исследуется статистическая оценка определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$ при помощи формулы $\check{I} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ (Kitagava T., Bull. Math. Statist., 1950, **4**, 15—21), где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные переменные, равномерно распределенные в этом интервале. Интеграл I является при этом математическим ожиданием величины $\check{I}$. Дается оценка точности вычисления искомого интеграла и в качестве иллюстрации приводится результат вычисления интеграла $\int_0^{e^{-\pi}} \sqrt[10]{|\sin(\lg x)|}\,dx$ с точностью до 1,1%.

Исследуется вопрос о стохастическом вычислении объемов многомерных тел, определенных сложными неявными соотношениями между координатами (РЖМат, 1956, 7713). Для получения наилучшей оценки погрешности используется комбинация обычного метода с методом Монте-Карло. Приводится результат, который авторы называют стохастическим видоизменением метода целых точек.

В работе описывается обращение матриц по методу Форсайта — Лейблера (Forsythe G. E., Leibler R. A., Math. Tables and Other Aids Comput., 1950, 127—129); при этом приводятся новые формулы для верхних оценок σ_{ik}^2 и $E(\tau)$, не содержащие элементов неизвестной обратной матрицы.

В. Я. Евфанов

1845. Замечание об использовании обратной функции для линейного обратного интерполирования. Стелсон (Note on using the reciprocal function for a linear inverse interpolation. Stelson Hugh E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 53, 32—34 (англ.)

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — монотонные функции такие, что $yz = 1$, причем $y(x)$ предполагается положительной и возрастающей; значение x_a, полученное линейной интерполяцией для аргумента x из таблицы значений $y(x)$, дается формулой

$$x_a = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1).$$

Отмечаются следующие случаи: 1) $y'' < 0$, $z'' > 0$, тогда $E_b > E_a$; 2) $y'' > 0$, $z'' < 0$, тогда $|E_b| < |E_a|$; 3) $y'' < 0$, $z'' < 0$, случай невозможен; 4) $y'' > 0$, $z'' > 0$, тогда $E_b < |E_a|$; E_a и E_b — ошибки линейной интерполяции функций y и z соответственно. Е. Н. Деканосидзе

1846. Непрерывная дробь для e^x. Мейкон (A continued fraction for e^x. Macon N.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 52, 194—195 (англ.)

Приводится разложение в непрерывную дробь

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2} + \cfrac{x^2/4}{3} + \cfrac{x^2/4}{5} + \cdots + \cfrac{x^2/4}{2\nu - 1} + \cdots},$$

которое довольно быстро сходится для всех x. Эта формула получена применением известного преобразования непрерывных дробей к разложению Гаусса функции e^x в непрерывную дробь. Л. Н. Кармазина

1847. Изменение метода вычисления обратных тригонометрических функций. Ла-Фара (Modification of a method for calculating inverse trigonometric functions. La Fara R. L.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 49, 25 (англ.)

Рассматривается незначительное видоизменение ранее предложенного метода (РЖМат, 1956, 770), уменьшающего ошибки, происходящие за счет округления чисел, и облегчающего программирование для машины ИБМ-605. Н. Н. Поснов

1848. Новый графический принцип определения преобразований Фурье. Гренвилл-Уэлс (A new graphical principle for the evaluation of Fourier transforms. Grenville-Wells H. J.), Acta crystallogr., 1955, **8**, № 11, 737 (англ.)

Дополнение к графическому методу определения сумм вида

$$\sum_{\lambda=0}^{L} f_\lambda(h, k) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(hx_\lambda + ky_\lambda),$$

предложенному автором ранее (РЖФиз, 1955, 21735) М. Г. Серебренников

1849. О номографировании функций, заданных на сетке. Айзенштат Н. Д., Вайнштейн И. А., Крейнес М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 138

1850. Построение номограмм с параллельными шкалами. Зинин М. В., Тр. Бежицк. ин-та трансп. машиностр., 1955, вып. 14, 189—204

Попытка теоретического обоснования построения номограмм с параллельными шкалами. Построен ряд номограмм для уравнений с конкретными данными. С. М. Головина

1851. Изображение неявных функциональных зависимостей номограммами из выравненных точек. Ботош, Хоссу (Implicit alakú függvénykapcsolatok ábrázolása pontsoros nomogrammokkal. Botos György, Hosszú Miklós), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), **3**, № 1—2, 195—208 (венг.; рез. русс., англ.)

Рассматривается методика применения известных условий номографируемости в тех случаях, когда уравнения даны в форме, не допускающей разрешения относительно одной из переменных. Разобраны условия Сен-Робера для случая уравнения $u(x, y, z) = 0$, их аналог для случая четырех переменных, а также условия представимости данного уравнения вида $u(x, y, z) = 0$ в форме Коши $\alpha(z) f(x) + \beta(z) g(y) = 1$.

Приводится номограмма из выравненных точек для уравнения $(p + a/v^2)(v - b) - RT = 0$.

Г. Е. Джемс-Леви

1852. Оформление номограмм. Хорват (Nomogrammok kivitelezése. Horváth Ferenc), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int., közl., 1954 (1955), **3**, № 3—4, 343—352 (венг.; рез. русс., англ.)

Сообщаются результаты в области оформления номограмм, достигнутые Отделом численных и графических методов Института прикладной математики Академии наук Венгрии.

1853. Делайте сами номограммы. Уинн (Nomograms... make your own. Part 1—3. Winn Francis W.), Petrol. Refiner, 1955, **34**, № 10, 143—147 (англ.)

Приводятся элементарные сведения о номограммах. Отмечается значение номограмм в технике и для различных экспериментальных исследований. Приводится сопоставление номограмм с координатными сетками. Дается классификация номограмм по количеству зависимых и независимых переменных. Указывается на некоторые примеры номограмм, употребляемых в технике, опубликованные в печати. Далее приводятся основные сведения о построении функциональных шкал, отмечается необходимость интерполирования, даются объяснения, как построить равномерную шкалу, логарифмическую шкалу, а также как использовать логарифмическую бумагу. Приводятся графики функций на логарифмической бумаге. Статья заканчивается описанием построения номограммы на миллиметровой и логарифмической бумаге.

Примечание референта. Элементарные и в то же время более полные, чем в реферируемой статье, сведения о номограммах имеются в книге В. М. Брадиса «Средства и способы элементарных вычислений» (Учпедгиз, 1954, стр. 186—226).

Е. В. Вандышева

1854. О наилучшем преобразовании номограмм из выравненных точек. Пентковский М. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 194—195

1855. Новый способ проективного преобразования номограмм на сетке. Пентковский М. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 195

1856. Применение счетной линейки для перехода от одной формы комплексного числа к другой форме. (Учеб. пособие для студ.). Зевеке Г. В., Моск. энерг. ин-т, М., 1956, 8 стр., илл., беспл.

1857. К вопросу о решении косоугольных треугольников в средней школе с помощью приборов. Скундин Е. А., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 129—132

1858 К. Вычислительные методы линейной алгебры. Фаддеева (Metody numeryczne algebry liniowej. Faddiejewa W. N., Tłum. z ros. Siemionow Aleksy, 208 s., PWN, Warszawa, 1955, **17**, 90 zł.) (польск.)

Книга состоит из трех разделов, в первом из которых содержатся сведения по линейной алгебре, необходимые для понимания дальнейшего изложения. В двух следующих разделах приводится описание методов решения линейных уравнений и определения собственных значений матрицы. Для иллюстрации методов приведены соответствующие вычислительные

схемы, числовые примеры и методы контроля. В случае применения нескольких методов для решения одного и того же вопроса, автор указывает на их специфические черты и определяет область применяемости. Из числа польских работ применяется метод Т. Банахевича.

В разделе о решении линейных алгебраических уравнений содержатся связанные с главной темой методы вычисления детерминантов, вычисления обратных матриц, а также так называемый вопрос исключения, состоящий в вычислении значений линейных форм для переменных, являющихся корнями некоторой системы линейных уравнений. Для этих вопросов приведен метод Гаусса, основанный на последовательных исключениях (схема единственного деления и так называемая компактная схема), затем методы, основанные на разложении матрицы на треугольные множители, метод исключения, а также нахождения обратной матрицы при помощи разбиения на клетки. Рассмотрен также вопрос добавления к решенной уже системе уравнений дополнительного уравнения дополнительной неизвестной (метод окаймления), эскалаторный метод, а также приближенные итерационные методы с обширным учетом метода Зейделя.

В разделе об определении собственных значений и собственных векторов матрицы приведены точные и приближенные методы. Рассмотрен так называемый эскалаторный метод (позволяющий решить совместно оба вопроса), а также способы использования вычислений, произведенных при определении собственных значений матрицы, для определения собственных векторов. Для этих обоих вопросов в книге приводятся кроме того методы Крылова, Самуэльсона, Данилевского, Леверье (Фаддеева), а также метод интерполяции (с приведением таблицы коэффициентов интерполяционной формулы А. А. Макарова). Приближенные методы касаются определения первого и следующих собственных значений с учетом вопроса ускорения итерации в случае, когда значения являются вещественными и комплексными числами, а связанные с этими значениями элементарные делители матрицы являются линейными и нелинейными. T. Iwiński

ТАБЛИЦЫ

1859. Таблица функций $Kj_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x u^n K_B(u)du$. **Маллер** (Table of the function $Kj_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x u^n K_B(u)du$. Muller G. M.), U. S. Atomic Energy Comm. Repts, 1954, 91 pp. (англ.)

Даются значения указанных в заглавии функций с восемью значащими цифрами для $n = 0$ (1) 31, $x = 0{,}00$ (0,01) 2,00 (0,02) 5,00. Здесь $K_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента второго рода порядка нуль. Таблицы изготовлены в качестве вспомогательного средства для вычисления интегралов вида $\int K_0(u)\, f(u)\, du$, где $f(x)$ — целая функция. Во введении приводится ряд примеров использования таблиц, кратко описан метод их вычисления. Л. Н. Кармазина

1860. О способе Ариабхаты для составления тригонометрических таблиц. Кузьмин Р. О., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 14, 107—127

В форме, доступной для «сильных» учащихся средней школы, рассказывается о нескольких способах составления тригонометрических таблиц.

Способ Ариабхаты предполагает использование формулы

$$\sin(m+1)a - \sin ma = \sin ma - \sin(m-1)a - (\sin ma)/\sin a,$$

имеющейся в таблице Ариабхаты и дающей довольно хорошую точность при $a = 3°45'$, причем синус Ариабхаты есть отношение линии синуса соответствующего угла к длине дуги в $1'$, взятой у круга того же радиуса.

Показано, как составить таблицу по формуле Симпсона

$$\sin(m+1)a - \sin ma = \sin ma - \sin(m-1)a - 4\sin^2\frac{a}{2}\sin ma,$$

приведена таблица $\sin ma$ для $a = 1°$ и $m = 0,1,\ldots,30$, обсуждены вопросы о накоплении погрешностей, точности таблицы, сделаны некоторые рекомендации для составления таблиц. Е. Н. Деканосидзе

1861. Специальная тепловая функция для двумерного континуума. Данк, Барбер (The specific heat function for a two-dimensional continuum. Dank M., Barber S. W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 191—194 (англ.)

Табулируется функция

$$\frac{C_2}{C_\infty} = \frac{6}{x^2}\int_0^x \frac{\zeta^2 d\zeta}{e^\zeta - 1} - \frac{2x}{e^x - 1}$$

для значений $x = 0{,}0\,(0{,}1)\,9{,}4$ и $x = 10{,}0\,(0{,}5)\,16{,}0$ с пятью знаками. В. С.

1862. Таблицы коэффициентов W ($abcd$; ef). Оби, Исидзу, Хори, Янагава, Танабе, Сато (Tables of the racah coefficients W ($abcd$; ef), Part II. Coefficients having three half-integral variables a, c and e ($f = 0, 1, 2, 3, 4$). Obi Shin-Ya, Ishidzu Takehiko, Horie Hisashi, Yanagawa Sadaaki, Tanabe Yukito, Sato Masachiyo), Ann. Tokyo Astron. Observ., 1954, 4, № 1, 3—74 pp. (англ.)

1863. Таблицы для определения степени соответствия. Исикава (適合度の精密検定表・石川榮助), 科學, (Какаку), 1953, 23, № 11, 585—586 (япон.)

1864. Табулирование функций и приложения. Нейшулер Л. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. I. М., АН СССР, 1956, 193—194

1865 К. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. Смирнов А. Д. М., АН СССР, 1955, 261 стр., илл., 28 р.

В первой части книги даны пятизначные значения линейно независимых решений $U_1(s,1)$ и $U_2(s,1)$ уравнения Эйри $U''(s) + sU(s) = 0$, определяемых начальными условиями $U_1(0,1) = 1$, $U_1'(0,1) = 0$, $U_2(0,1) = 0$, $U_2'(0,1) = 1$, их производных $U_1'(s,1)$, $U_2'(s,1)$ и интегралов

$$V_{11}(s) = \int_0^s \left[U_1^2(s,1) - \frac{\sqrt[3]{3}\,\Gamma^2(2/3)}{2\pi\sqrt{s}}\right] ds,$$

$$V_{12}(s) = \int_0^s \left[U_2(s,1)U_2(s,1) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{s}}\right] ds,$$

$$V_{22}(s) = 1 + \int_0^s \left[U_2^2(s,1) - \frac{\Gamma^2(1/3)}{2\sqrt[3]{3}\,\pi\sqrt{s}}\right] ds$$

в интервале $0 \leqslant s \leqslant 10$ с шагом 0,01 и пятизначные

значения функций $U_1(s, 1)$; $U_2(s, 1)$; $U_1'(s, 1)$ и $U_2'(s, 1)$ в интервале $-6{,}0 \leqslant s \leqslant 0$ с шагом 0,01.

Во второй части даны четырехзначные значения линейно независимых решений $U_1(s, \alpha)$ и $U_2(s, \alpha)$ обобщенного уравнения Эйри $U''(s) + s^{\alpha}U(s) = 0$, определяемых начальными условиями, аналогичными предыдущим, и их производных на интервале аргумента $0 \leqslant s \leqslant 6{,}0$ с шагом 0,01 при следующих значениях аргумента:

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{7}{4};\ 2;\ -\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{3}{4}.$$

В третьей части даны четырехзначные значения линейно независимых решений $V_1(s, p_0)$ и $V_2(s, p_0)$ вырожденного гипергеометрического уравнения

$$V''(s) + \left[\frac{p_0}{2}\left(1 - \frac{p_0}{2}\right)\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right]V(s) = 0$$

и их производных на интервале аргумента $0 \leqslant s \leqslant 10$ с шагом 0,01 при фиксированных значениях p_0 от 0,1 до 1,0 с шагом 0,1. Дана также пятизначная таблица нулей функций $V_1(s, p_0)$ и $V_2(s, p_0)$.

Во введении приведены графики нескольких табулированных функций и правила пользования таблицами, обсуждены вопросы интерполяции в таблицах, дан пример использования таблиц для решения дифференциальных уравнений второго порядка, опирающийся на метод «эталонных решений», данных А. А. Дородницыным.

Е. Н. Деканосидзе

1866 К. Значения дзета-функции 2-го порядка с аргументом *s*-2. Эмерслебен (Werte einer Zetafunktion 2. Ordnung mit Argument *s*-2, der Grundfunktion der doppelperiodischen Parallelströmung zäher Flüssigkeiten. Emersleben Otto. Greifswald, O. Emersleben, 1956, 13 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, B, № 10, 817 (нем.)

1867 К. Пятизначные логарифмо-тригонометрические таблицы для десятичного деления окружности. Гаусс (Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Teilung. Gauß F. G., Stuttgart, Wittwer, 1956, XXIV, 189 S., 6.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 8, 508 (нем.)

1868 К. Логарифмические таблицы. Шлёмильх, Майцен (Logaritamske tablice. 6 izd. Schlömilch O., Majcen J. Zagreb, «Školska knjiga», 1956, 212 str.), Bibliogr. jugosl., 1956, 7, № 8, 285 (сербо-хорв.)

См. также: 1385, 1411 Д, 1422, 1689, 1948

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1869. Одномикросекундный сумматор, использующий схемы, работающие на частоте 1 *Мгц*. Уэйнбергер, Смит (A one-microsecond adder using one-megacycle circuitry. Weinberger A., Smith J. L.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 2, 65—73, 95 (англ.)

Подробно описывается параллельный сумматор, разработанный в Национальном бюро стандартов и выполняющий сложение двух 53-разрядных двоичных чисел в течение 1 μ сек.

В сумматоре используются стандартные одноламповые субблоки НБС, в которые, кроме лампы типа 6AN5, входят работающие последовательно один на другой дешифраторы «или-и-или». Второй дешифратор «или» подключен к сетке лампы — усилителя с трансформаторной нагрузкой. Подобные ячейки могут работать в режиме динамического триггера, если выходной импульс через линию задержки подать обратно на входной дешифратор «или»; они могут соединяться в регистры, работая один на другой. Причем каждая ступень регистра синхронизируется различными последовательными фазами синхронизирующего синусоидального напряжения. Поскольку время задержки на каждом каскаде много меньше 1 μсек, в такой схеме стало возможным использовать 5 фаз синхронизирующей синусоиды частотой 1 *Мгц*. Таким образом, через пять последовательных каскадов импульс проходит за время, равное 1 μсек. С помощью дешифраторов в каждом каскаде можно осуществлять различные логические преобразования. На одну лампу могут работать 4 дешифратора «и» с шестью входами каждый.

Авторы, используя аппарат и систему обозначения булевой алгебры, рассматривают принципы построения параллельных сумматоров с различными схемами образования двоичного переноса.

Очевидно, что результат переноса в k-м разряде сумматора будет

$$C_k = A_kB_k + (A_k + B_k)C_{k-1}, \qquad (1)$$

где A_k и B_k изображают информацию в k-м разряде соответствующих регистров сумматора. Из (1) следует, что при последовательной схеме двоичного переноса в n разрядах потребуется при использовании стандартных субблоков НБС $(n-1)$ синхронизирующих тактов.

Для увеличения скорости переноса можно получать C_k не как функцию C_{k-1}, а как величину, зависящую только от информации в регистрах слагаемых и C_0. Действительно, обозначив

$$D_k \equiv A_kB_k, \quad R_k \equiv (A_k + R_k), \qquad (2)$$

можно переписать (1) в виде

$$C_k = A_kB_k + (A_k + B_k)C_{k-1} \equiv D_k + R_kC_{k-1} =$$
$$= D_k + R_kD_{k-1} + R_kR_{k-1}C_{k-2} = D_k + R_kD_{k-1} +$$
$$+ R_kR_{k-1}D_{k-2} + \ldots + R_kR_{k-1}\ldots R_2R_1C_0. \qquad (3)$$

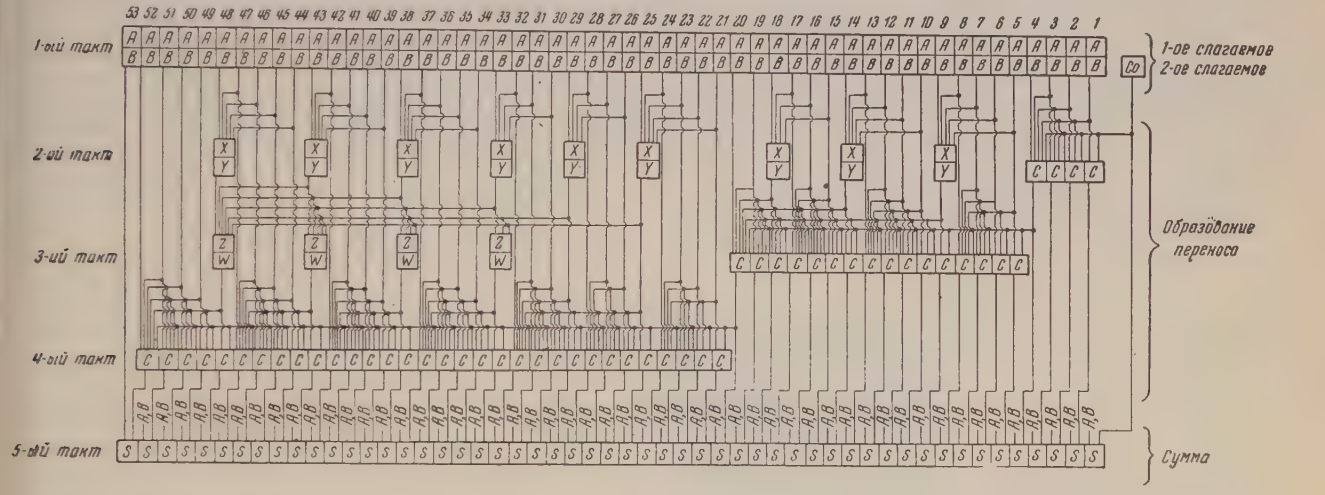
Из (3) следует, что принципиально можно получать результат переноса в k-м разряде за один такт, но для этого потребовалось бы $(k+1)$ дешифраторов «и» и самый сложный дешифратор должен был бы иметь $(k+1)$ входов.

С помощью четырех дешифраторов «и» на шесть входов каждый можно получить перенос за один такт в 4-м разряде группы из четырех разрядов сумматора. В первых трех разрядах группы потребуются менее сложные дешифраторы. Это легко иллюстрируется выражениями:

$$C_{k-1} = D_{k-1} + R_{k-1}D_{k-2} + R_{k-1}R_{k-2}D_{k-3} +$$
$$+ R_{k-1}R_{k-2}R_{k-3}C_{k-4},$$
$$C_{k-2} = D_{k-2} + R_{k-2}D_{k-3} + R_{k-2}R_{k-3}C_{k-4},$$
$$C_{k-3} = D_{k-3} + R_{k-3}C_{k-4}. \qquad (4)$$

Используя одновременное образование переноса в группах из 4 разрядов сумматора и последовательную передачу результата переноса из одной группы в другую, можно увеличить скорость двоичного переноса по сравнению с последовательной схемой в 4 раза. Дальнейшее увеличение скорости переноса может быть достигнуто за счет образования вспомогательных функций переноса первого и второго рода. При образовании функций переноса первого рода сумматор работает следующим образом. В течение первого синхронизирующего такта слагаемые принимаются в регистры сумматора. В течение второго такта в первых четырех разрядах сумматора образуется результат тает с использованием функций переноса первого и второго рода. В первом такте в регистры сумматора принимаются слагаемые и фиксируется содержимое C_0. Во втором такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 1 по 4 и функции переноса первого рода в оставшихся разрядах, сгруппированных либо по 4, либо по 5. В третьем такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 5 по 20 и функции переноса второго рода в оставшихся разрядах. В четвертом такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 21 по 52. В пятом такте образуется сумма одновременно во всех разрядах сумматора.

Л. С. Легезо



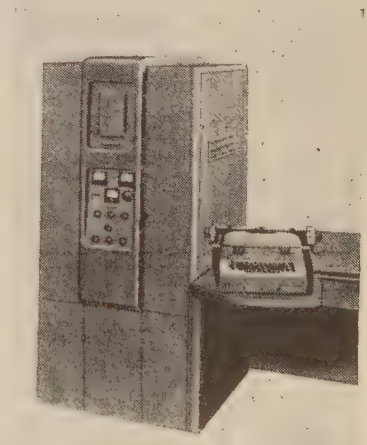
окончательного переноса, а в группе более старших разрядов с 5 по 29 (приведенный в статье анализ показывает, что в данном случае эта группа может состоять из 25 разрядов) образуются вспомогательные функции переноса с помощью уже описанных выше схем. В течение третьего такта образуется результат окончательного переноса в разрядах с 5 по 29 с учетом C_4 и функций переноса, полученных в предыдущем такте, а также выполняется вспомогательный перенос в разрядах с 30 по 54 и т. д. Сумма может образовываться раздельно в каждой группе разрядов по мере получения окончательного переноса, но обычно ее образуют после завершения переноса в группе старших разрядов. Сумматор с образованием вспомогательных функций переноса первого и второго рода позволяет выполнять двоичный перенос с еще большей скоростью. В первом такте принимаются слагаемые в регистры сумматора. Во втором такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 1 по 4 и функции переноса первого рода в двух группах разрядов: с 5 по 29 и с 30 по 179. В третьем такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 5 по 29, функции переноса второго рода в разрядах с 30 по 179 с учетом функций переноса первого рода, полученных в предыдущем такте, и функции переноса первого рода в разрядах с 180 по 329. В четвертом такте образуется результат окончательного переноса в разрядах с 30 по 179, функции переноса второго рода в разрядах с 180 по 329 и т. д.

Использование приведенного метода построения сумматоров дает наибольший эффект в случае, если количество необходимых одновременных переносов меньше, чем возможный максимум, так как при этом экономится большое количество элементов.

Сумматор на 53 двоичных разряда (см. фиг.) рабо-

1870. Универсальная цифровая вычислительная машина и цифровой дифференциальный анализатор. У о л з (Digital computers General-purpose and DDA. W a l z R i c h a r d F.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 9, 1516—1522 (англ.)

Сообщение о двух цифровых вычислительных машинах фирмы «Бендикс» (Bendix Computer Division of Bendix Aviation Corp.). Одна из машин универсальная (G-15), а другая является дифференциальным анализатором (D-12).



К реф. 1870 Фиг. 1

Модель G-15 (см. фиг. 1) является последовательной машиной с запоминающим устройством на магнитном барабане. Скорость барабана 1800 об/мин. В основном запоминающем устройстве используется 20 дорожек по 108 кодов (всего 2160 кодов). Среднее время выбора из этого устройства 14,5 мсек. Четыре дорожки на барабане (по 4 кода в каждой) используются в качестве

быстродействующего запоминающего устройства со средним временем выбора 0,54 мсек. Три дорожки на 2 кода и одна дорожка на 1 код отведены для регистров арифметического узла. Длина кода может быть либо 29, либо 58 двоичных разрядов.

Система программирования — двухадресная с указанием адреса следующей инструкции. В машине имеются операции сложения, вычитания, умножения и деления с нормальной и двойной точностью, условного перехода, а также операции сдвига и нормализации чисел при работе с учетом порядков.

Время сложения 0,54 мсек и 0,81 мсек (для нормальной и двойной точности соответственно). Время умножения (деления) 16,7 мсек и 33,1 мсек. Ввод осуществляется по десятичной или десятично-кодированной системе.

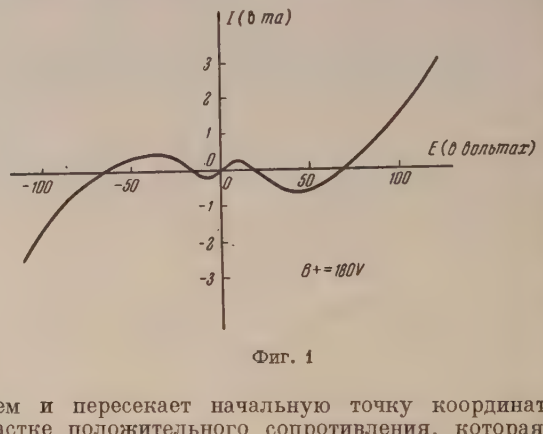
Оборудование ввода-вывода: телетайп со скоростью 10 знаков в 1 сек., ленточный перфоратор со скоростью 15 знаков в 1 сек., фотоэлектрический трансмиттер со скоростью 200 знаков в 1 сек. Совместно с машиной могут использоваться магнитные ленты, перфокарты и вычерчиватель кривых.

Модель D-12 (см. фиг. 2) является цифровым дифференциальным анализатором (DDA — Digital Differential Analyzer). Машина оперирует с числами, представленными в десятичной форме. Ввод и вывод происходит также в десятичной форме. Выходные данные могут печататься на телетайпе или вычерчиваться. Ввод данных осуществляется с перфоленты. D-12 состоит из двух блоков: пульта и собственно вычислительной машины. В блоке вычислительной машины располагается арифметический узел, запоминающее устройство, устройство выбора адресов и система питания. Арифметический узел собран из обычных для цифровых вычислительных машин элементов на электронных лампах. В качестве запоминающего устройства применяется магнитный барабан диаметром 280 *мм*, имеющий 14 дорожек. Скорость вращения барабана 4000 об/мин. В машине 60 интеграторов. Ввод данных в интегратор производится менее чем за 5 сек. Точность вычислений 7 десятичных знаков. Для интегрирования применяются методы: прямоугольников, интерполяционный и экстраполяционный. При использовании всех интеграторов скорость итераций равна 100 в 1 сек. При использовании 30 и менее интеграторов скорость итераций повышается до 200 в 1 сек. Потребляемая мощность 6 *квт*. Размер пульта 80×150×93 *см*. Размер шкафа вычислительной машины 68×150×180 *см*. Общий вес около 900 *кг*. Разобраны типичные задачи, решаемые анализатором. А. И. Щуров

К реф. 1870 Фиг. 2

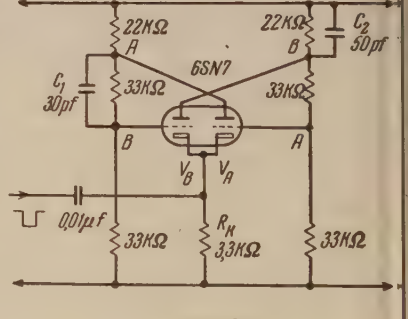
1871. Счетчики с основанием три. Маккей, Макинтайр (Ternary counters. Mackay R. S., MacIntyre R.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, 4, № 4, 144—149, 159—160 (англ.)

Приводится описание схемы триггера с тремя устойчивыми состояниями, имеющего такое же количество оборудования, как и обычный двоичный триггер. Вольтамперная характеристика предлагаемой схемы (фиг. 1) имеет 2 участка с отрицательным сопротивле-



Фиг. 1

нием и пересекает начальную точку координат на участке положительного сопротивления, которая таким образом становится третьей точкой устойчивого состояния схемы. Схема триггера с тремя устойчивыми состояниями на лампе 6 SN7 приведена на фиг. 2. Она отличается от обычной схемы триггера меньшим сопротивлением, включенным в общую точку катодов, и тем, что в одном из плечей форсирующая емкость в цепи анод — сетка заменена подключением емкости параллельно сопротивлению нагрузки в аноде этой лампы. Дополнительное устойчивое состояние схемы определяется наличием сеточных токов у обеих ламп и равенством напряжения на их анодах. При анодном питании 180 *в* потенциалы анода, соответствующие трем состояниям схемы, равны 35 *в*, 66 *в* и 119 *в*. Описанная система подключения емкостей в схеме триггера обеспечивает наличие устойчивого состояния «1» лишь при переходе схемы от состояния «0» к состоянию «2», в то время как при обратном переходе схема непосредственно из состояния «2» переходит в состояние «0». Запуск триггера осуществляется импульсами отрицательной полярности, прикладываемыми к катоду триггера. Схема является весьма критичной к амплитуде и длительности этих импульсов при переходе из состояния «0» в состояние «1». Требуется стабильность амплитуды в пределах ± 10%.



Фиг. 2

Приводится схема многокаскадного счетчика на триггерах с тремя устойчивыми состояниями и эпюры напряжений для различных точек этой схемы. Триггеры запускаются от клапанов на отрицательные импуль-

сы, которые управляются напряжением соответствующего анода предыдущего триггера и стандартными отрицательными импульсами. Импульс появляется лишь на том клапане, управляющий триггер которого находился в состоянии «2». Аналогичная схема триггера на лампе 6J6 требует стабильности импульсов запуска в пределах 9—12 *в*. А. Б. Залкинд

1872. Временные и пространственные связи в условновероятностной машине. Атли (Temporal and spatial patterns in a conditional probability machine. Uttley Albert M.), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 277—285 (англ.)

Рассматривается принципиальная возможность моделирования процессов выработки у животных временной и пространственной связи. Работа входит в цикл работ автора и содержит ссылки на предыдущие статьи.

Предположим, что имеется машина, состоящая из элементов, срабатывающих при одновременной подаче на их вход двух сигналов, и цепей задержки. Пусть на входные устройства этой машины подаются импульсы *j*, *k* (рассмотрим только два импульса). Очевидно, что такая машина сможет различить одновременное появление *j* и *k* (*jk*), возникновение вначале *j* затем *k* (*jʹk*) и наоборот (*jkʹ*), т. е. машина сможет различать временные зависимости. Если машина обладает также запоминающим устройством и мы ее подвергнем процессу обучения, т. е. будем задавать на вход различные временные зависимости, которые могут возникнуть в предполагаемых условиях, то задав ей впоследствии комплекс импульсов («возбуждений»), можно от нее получить ответ (на основе данных, полученных в процессе обучения), как и с какой вероятностью картина возбуждений будет развиваться дальше во времени. Таким образом, машина на основе «опыта» может предугадать временную связь. Далее, если мы рассмотрим такой орган как глаз, то увидим, что в процессе наблюдения объекты рассматриваются по частям и пространственная связь выступает как временная, т. е. тоже может быть моделирована.

Библ. 4 назв. Г. Г. Стецюра

1873. Электронная цифровая вычислительная машина МОЗАИК. Ч. 3 (*b*). Программирование (Продолжение). Кумс («Mosaic»— An electronic digital computer. Part 3 (b). The art of programming (Continued). Coombs A. W. M.), P. O. Electr. Engrs' J., 1956, 49, № 1, 18—21 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1956, 5557; 1957, 941—942.

Рассматриваются отдельные стадии программирования: 1) выбор наиболее выгодного для машины численного метода решения задачи, 2) составление блок-схемы решения задачи, 3) исследование возможности использования уже готовых подпрограмм, 4) развертка блок-схемы в программу. На отдельном примере подробно разбираются все стадии программирования применительно к машине МОЗАИК, объяснены особенности кода машины: машина выполняет операции сложения, вычитания, умножения и сравнения. Операция деления выполняется по специальной подпрограмме, основанной на последовательном многократном вычитании делителя из делимого с проверкой знака остатка после каждого вычитания. Отмечается удобство программирования при наличии библиотеки подпрограмм и дается объяснение команд перехода к любой имеющейся подпрограмме, причем в подпрограмме может быть использована так называемая подпрограмма «второго порядка», для которой первая является как бы главной программой. Обратный переход к главной программе осуществляется с помощью команды связи, которая фиксируется перед выходом на подпрограмму. Подробно разбирается подпрограмма вычисления cos θ и sin θ. З. Д. Доброхотова

1874. Автоматизация программирования. Ершов А. П., Любимский Э. З., Камынин С. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 74—76

Сообщается о разработке и применении программирующих программ в Математическом институте АН СССР и Вычислительном центре АН СССР. Построенные операторные программирующие программы являются универсальными и допускают возможность включения новых типов операторов, если в ходе практической работы окажется целесообразным их выделение.

Рассматривается также другой метод автоматизации программирования — метод стандартных подпрограмм; отмечаются его достоинства и недостатки. Затрагивается также вопрос автоматизации контроля программ, который является одним из разделов автоматизации программирования. Н. П. Трифонов

1875. Использование электронной цифровой вычислительной машины для расчета на прочность самолета. Ч. I. Хант (The electronic digital computer in aircraft structural analysis. Part I. A description of a matrix interpretive scheme and its application to a particular example. Hunt P. M.), Aircraft Engng, 1956, 28, № 325, 70—76 (англ.)

Описывается применение электронных цифровых вычислительных машин для анализа напряжений и деформаций в конструкциях самолета на основе матричного метода.

Описывается разработанная для вычислительной машины «Пегас» фирмы «Ферранти» матрично-преобразовательная схема (приставка), которая дает возможность производить законченные операции над матрицами непосредственно, без разделения программы на большое количество мелких команд. Техника составления программ по этой новой схеме применима для большинства цифровых машин.

Дается детальное описание способа действия схемы. Объем запоминающего устройства, используемого для операций над матрицами, составлял 3070 ячеек. Рассматривается емкость запоминающего устройства, необходимая при различных типах матриц. Дается таблица и способ записи команд для действия над матрицами и метод программирования. В конце приводится пример расчета и программирования для конкретной задачи. Г. К. Кузьминок

1876. Обучение вычислительной машины. Хоппер (The education of a computer. Hopper Grace Murray), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 139—144, discuss. 144—145 (англ.)

Указывается на необходимость выполнения самой машиной работы по составлению программы. Одним из возможных путей решения этой задачи является метод использования подпрограмм. Другим путем являются методы использования псевдокоманд и операторов. Указывается, что автоматизация процесса программирования дает следующие преимущества: 1) устранение необходимости в механической работе по распределению ячеек памяти, преобразованию адресов и расписыванию программы; 2) ликвидация источника ошибок программирования и кодирования; 3) сокращение времени программирования; 4) возможность управления операциями; 5) устраняется необходимость в дублировании программы, так как каждая такая программа может служить в качестве подпрограммы.

В конце статьи приводится дискуссия по докладу. Б. И. Шитиков

1877. Кристаллографические вычисления на быстродействующей цифровой вычислительной машине

СВАК. Спаркс, Прозен, Круз, Трублад (Crystallographic calculations on the high-speed digital computer SWAC. Sparks R. A., Prosen R. J., Kruse F. H., Trueblood K. N.), Acta crystallogr., 1956, 9, № 4, 350—358 (англ.)

Сообщается о применении машины СВАК для решения задач структурного анализа кристаллов. За последние два года авторами составлена целая серия программ для решения различных задач, встречающихся в кристаллографии, которые были применены при исследовании более 30 кристаллических структур.

В основном программы составлены для реализации наиболее распространенных методов исследования — суммирования рядов Фурье (двумерных и трехмерных), вычисления структурных амплитуд и уточнения структур по методу наименьших квадратов. Авторы отмечают общность составленных программ — по каждой из них можно проводить вычисления для любой пространственной группы симметрии. Это достигается за счет того, что в программах имеется несколько десятков команд, которые меняются в зависимости от конкретного случая.

Наряду с достоинствами таких общих программ — уменьшение возможности ошибок при подготовке задачи,— указываются и их недостатки — вычисление по такой программе обычно требует на 25% больше времени, чем по частной программе, и требуется больше перфорации при подготовке задач, что увеличивает и время ввода.

После краткого описания машины СВАК дается довольно подробное описание программ. Значительное внимание уделяется методам контроля вычислений. Отмечается, что в результате случайных ошибок машины пропадало только 1—2% затраченного времени.

Кратко упоминается о применении машины к решению некоторых отдельных задач кристаллографии, для которых машины еще используются редко: вычисление межатомных расстояний и углов в больших молекулах (витамин B12), определение максимумов по небольшому количеству точек и т. д. Библ. 18 назв.

Н. П. Трифонов

1878. Цифровой дифференциальный анализатор «Литтон-20» (Versatile computer promises to break mathematics bottleneck), West. Aviat., 1955, **35**, № 12, 22 (англ.)

Фирма «Литтон» (Litton Industries, Inc.) сообщает о выпуске первого из серии настольных цифровых дифференциальных анализаторов «Литтон — 20» (РЖМат, 1956, 2502). Машина может выполнять несколько тысяч отдельных операций в секунду. В машине применяются съемные блоки. В качестве запоминающего устройства использован магнитный барабан, в качестве выходного устройства — катоднолучевая трубка, входное устройство клавишное. В качестве вспомогательных внешних устройств применяются повторители кривых и автоматические вычерчиватели кривых.

В. П. Кузнецова

1879. Электронная вычислительная машина (Electronic brain types answers), Oil and Gas J., 1955, 53, № 41, 75 (англ.)

Электронная вычислительная машина МИНИАК II стоимостью в 90 000 долл. скоро вступит в действие в «Атлантик Рифайнинг» (Atlantic Refining Co.). Машина предназначена для решения задачи нефтеперерабатывающей промышленности, она оперирует с двоичными 10-разрядными числами. МИНИАК II содержит 700 ламп и 1500 германиевых диодов. Запоминающее устройство на магнитном барабане может хранить 4000 чисел. Время выборки чисел с барабана составляет менее 0,01 сек. МИНИАК II делает 95 сложений или 43 умножения в 1 сек. МИНИАК II был спроектирован и построен за 6 месяцев фирмой «Мэрчент Рисёрч» (Marchant Research Inc.).

А. Н. Зимарев

1880. Введение в технику численных методов решения для цифровых вычислительных машин. Ч. I. Зауэр, Бауэр (Einführung in die numerische Verfahrenstechnik für Rechenautomaten. I. Teil. Sauer R., Bauer F. L.), MTW-Mitt., 1956, 3, № 1, 8—14 (нем.)

Автор в краткой форме излагает ступени развития программирования и на примере машины ПЕРМ (PERM) знакомит с логикой построения цифровых вычислительных машин. Даются некоторые сведения об этой вычислительной машине.

ПЕРМ — одноадресная, параллельная машина с двоичным представлением чисел, работающая по системе с плавающей запятой. Количество двоичных разрядов равно 50, два из них являются разрядами алгебраического знака мантиссы и порядка. Порядок представляется 8 двоичными разрядами, мантисса — 40 двоичными разрядами. Инструкция представляется 32 разрядами и размещается в тех же разрядах регистра арифметического узла, что и мантисса. Разряды, в которых размещается порядок (с 1-го по 9-й), при этом не используются. Адрес представляется 16 двоичными разрядами, код операций — также 16 двоичными разрядами. Последние 8 разрядов служат для целей контроля.

Машина ПЕРМ выполняет 4 арифметических действия, операции переноса, передачи управления и изменения адреса.

Г. С. Горячева

1881. Программирование расчетов термохимических свойств горючего на быстродействующей цифровой вычислительной машине. Донеган, Фарбер (Solution of thermochemical propellant calculations on a high-speed digital computer. Donegan A. J., Farber M.), Jet Propuls., 1956, 26, № 3, 164—711 (англ.)

Обсуждаются вопросы решения задач, связанных с процессами сгорания топлива в ракетной камере сгорания и выбрасывания газов через сопло. Подобные задачи были решены на одноадресной вычислительной машине EDC-30-202 фирмы «Электродейта» в Калифорнийском технологическом институте.

Критерием эффективности горючего является энергия, полученная при сгорании топлива. Он служит для выбора наилучшего сочетания химических компонент топлива. Весь процесс описывается системой нелинейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются газовый состав топлива, температура горения, средний молекулярный вес, скорость выбрасывания газов и пр.

Все уравнения разделяются на уравнения весового баланса и уравнения равновесия химического состава. Учет внешних условий усложняет уравнения. Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационными методами. Приводятся схемы вычислений и схемы основной программы и программы контроля вычислений.

А. А. Красилов

1882. Электронная вычислительная машина с магнитным барабаном сберегает умственный труд. Томас (Magnetic-drum electronic computer is brain saver. Thomas H. E.), Oil and Gas J., 1956, 54, № 47, 136, 139—140, 142, 146 (англ.)

Сообщается, что с сентября 1955 г. фирма El Paso Natural Gas Co. эксплуатирует машину ИБМ-650 с запоминающим устройством на магнитном барабане, емкостью 2000 ячеек. Машина приспособлена для расчета газовых трубопроводов. В число стандартных операций введены извлечение квадратного корня, возведение в степень и взятие десятичного логарифма. Подпрограммами, с помощью которых осуществляются эти операции, занято на барабане 300 ячеек. Основная

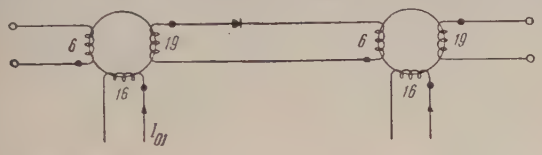
программа занимает около 1000 ячеек. Оставшиеся 700 ячеек используются для хранения чисел. Кроме того, данные вводятся с перфокарт в процессе вычислений (скорость ввода 200 карт в 1 мин.).

Н. П. Брусенцов

1883. Схемы на магнитных сердечниках для цифровых систем обработки данных. Лёв, Миле, Пайвинен, Уайлен (Magnetic core circuits for digital data-processing systems. Loev D., Miehle W., Paivinen J., Wylen J.), Proc. I. R. E., 1956, 44, № 2, 154—162, 265—266 (англ.)

Описаны логические элементы цифровых вычислительных машин на магнитных сердечниках.

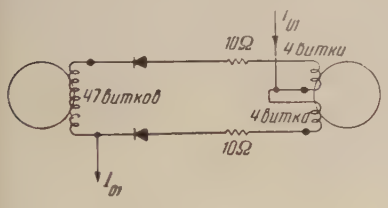
В схеме передачи информации от одного сердечника к другому (фиг. 1) первый сердечник намагничивается



К реф. 1883 Фиг. 1

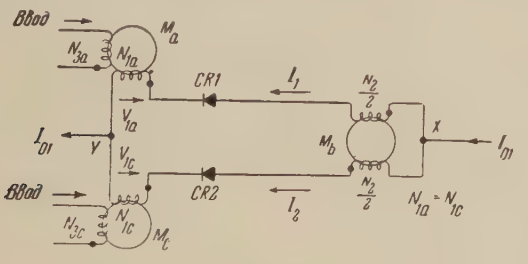
в состояние «1» импульсом тока, подаваемым во входную обмотку (6 витков). «Считывающий» ток I_{01} перемагничивает сердечник в состояние «0», причем в цепи связи возникает ток, записывающий «1» в следующий сердечник. Для предотвращения возврата информации в предыдущий сердечник отношение числа витков выходной обмотки к числу витков входной обмотки берется равным 3—5. При таком отношении ток, создаваемый э. д. с. входной обмотки, вследствие нелинейности характеристики диода получается малым и намагничивания предыдущего сердечника не происходит.

В схеме связи с расщепленной обмоткой (фиг. 2) правый сердечник перемагничивается током I_{01} в состояние «1» при условии, что левый сердечник находится в состоянии «1». Если левый сердечник находится в состоянии «0», то ток I_{01} разветвляется равными частями в обе половины обмотки правого сердечника и создаваемая им м. д. с. в сумме равна нулю. Здесь левый сердечник играет роль управляемого сопротивления.



К реф. 1883 Фиг. 2

В схеме с запрещением передачи информации (фиг. 3) состояние «1» передается от сердечника M_a



К реф. 1883 Фиг. 3

сердечнику M_b, при условии, что сердечник M_c находится в состоянии «0». Наличие «1» в сердечнике M_c запрещает передачу информации из M_a в M_b.

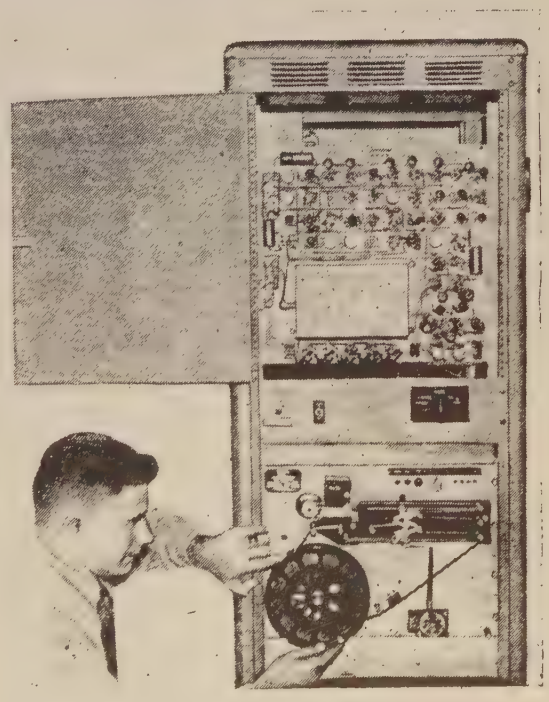
Приведены построенные на основе этих трех цепей схемы сдвигающих регистров, полусумматров, циклического распределителя импульсов и счетчика по модулю 7, а также схемы, выполняющие операции «и», «или», «или с исключением» и «отрицание».

Схемы осуществлены на сердечниках из тонкого молибденового пермаллоя, навитого на керамические тороиды диаметром 5 *мм*. Диоды, применяемые в схеме (фиг. 1), обладают при напряжении 1 *в* током 100 *ма*, диоды в схеме (фиг. 2)—200 *ма*. В качестве генераторов питающих импульсов использованы пентоды, тиратронные схемы и схемы типа блокинг-генераторов, причем последние могут запускаться импульсами сердечников и выполнять роль усилителей в случае, когда информация передается одновременно многим сердечникам. Схемы работают на частотах от 60 *гц* до 100 *кгц*. Были построены две модели цифровых систем, каждая из которых содержит 800 сердечников и 50 ламп, потребляет 500 *вт* и по объему в 4 раза меньше той же системы, выполненной на лампах (ламповый вариант содержит 530 ламп и потребляет 3 *квт*). Время работы без сбоев для первой модели составило 200 час. Вторая модель работала 2000 час. без порчи деталей.

Н. П. Брусенцов

1884. Высокая плотность записи в цифровых вычислительных машинах (High density recording for digital computers), Tele-Tech, 1955, 14, № 11, Sec. I, 90—91, 137—138 (англ.)

Описывается новый метод записи на магнитной ленте, разработанный в Национальном бюро стандартов. Плотность записи в сконструированном запоминающем устройстве (см. фиг.) достигает 20—28 *имп/мм*. Место



К реф. 1884

положение информации на ленте определяется маркерными импульсами, которые наносятся на ленту предварительно специальной схемой, обеспечивающей запись в маркерном канале «1» там, где должны быть нанесены маркеры, и запись «0» там, где должен быть сделан пропуск между отдельными кодами для разгона или оста-

новки ленты, т. е. для нанесения маркеров используется тот же принцип записи, что и в канале информации. См. также реф. 1885. А. И. Шуров

1885. Новая система записи на магнитную ленту с высокой степенью плотности для цифровых вычислительных машин (New high-density tape recording for digital computers), Process Control and Automat., 1956, **3**, № 1, 21 (англ.)

См. реф. 1884

1886. Производственная проверка вычислительных машин, применяемая Национальным бюро стандартов. Александер, Элбурн (Computer performance tests employed by the National Bureau of Standards. Alexander S. N., Elbourn R. D.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, 58—61 (англ.)

Описывается процедура тестовой проверки готовых вычислительных машин, разработанной Национальным бюро стандартов совместно с пятью правительственными агентствами. Задачей такого рода проверки является определение годности машины для продажи и работы.

При разработке процедуры проверки и тестовых подпрограмм в основу были положены следующие принципы. Машина проверяется как единый ансамбль, причем тестовые подпрограммы составлены так, чтобы в работе находились по возможности все устройства машины. За тестовую единицу выбран 20-минутный проверочный тест, который состоит из подпрограммы проверки основных операций и решения известного уравнения распределения тепла. Подпрограмма проверки основных операций повторяется при этом 404 раза.

20 мин., взятые в качестве единицы проверки, выбраны из тех соображений, что обычные задачи, решаемые на вычислительных машинах, занимают примерно такое же время. Критерием годности машины служит величина отношения числа отрицательных исходов испытания к числу всех. Машина считается годной, если это отношение не больше $^1/_5$. Из статистических соображений число испытаний должно быть не менее 100, а при условии, что отношение не превышает $^1/_5$ уже в первых испытаниях, это число может быть снижено до 76.

Дефекты в машине делятся на две категории — крупные и мелкие (major, minor). К крупным относятся дефекты, устранение которых требует вмешательства квалифицированного инженера для внесения исправлений в устройство машины. К мелким относятся дефекты, которые обнаруживаются внутренним контрольным устройством машины и причину которых может устранить оператор. Для мелких дефектов отношение отрицательных результатов ко всем может достигать $^1/_3$.

Поскольку, как показал опыт, большинство дефектов происходит за счет работы с магнитной лентой, предусмотрена специальная проверка этого устройства. Проверка ленты состоит в четырехкратном ее переписывании и сравнении исходных результатов с записанными в последний раз. Эта операция также длится около 20 мин. Весь процесс проверки рассчитан на то, чтобы в машине, признанной годной, вероятность ошибки при работе была бы меньше 0,1.

В статье приводятся таблицы результатов проверки нескольких машин. В частности, при тестовой проверке этих машин за общее время 1244 мин. на сбои приходилось 24 мин., при проверке работы магнитных лент на 2431 мин. было потеряно 506 мин.

В заключение авторы, отвечая на претензии покупателей и поставщиков вычислительных машин, приходят к выводу, что такого рода проверка не является достаточно эффективной, так как точное представление о качестве машины можно получить лишь, основываясь на опыте ее работы в течение нескольких месяцев. Л. Н Королев

1887. РАКЕР — всесторонний метод изучения элементов. Стейер (RACER: all-points method of component evaluation. Steier Henry P.), Amer. Aviat., 1955, **19**, № 3, 42—43 (англ.)

Сообщается, что работником лаборатории (Laboratory for Advanced Research) фирмы «Ремингтон Ранд» Лэмбом (James J. Lamb) была предложена система критериев, опираясь на которую, можно решить вопрос о выборе необходимых элементов электронных схем.

В качестве критериев для сравнения были выбраны следующие характеристики: надежность (Reliability), пригодность (Availability), совместимость (Compatability), экономичность (Economy), воспроизводимость (Reproducibility); начальные буквы этих слов составляют наименование системы — RACER. Надежность определяется вероятностью того, какой процент элементов при данном использовании будет иметь предписанный экономикой срок службы. Пригодность и совместимость представляют собой критерии, определяющие эффективность использования данного элемента как самого, так и с сопутствующими устройствами, с которыми он будет соединяться. Экономичность дает понятие о соотношении стоимостей сравниваемых элементов. В стоимость включается покупная цена и цена обработки, а также расходы на уход и амортизацию в течение обусловленного экономикой срока службы того устройства, в котором будут эти элементы применяться. Воспроизводимость включает в себя вопросы взаимозаменяемости, серийности, разброс характеристик и т. д.

В системе Лэмба каждому критерию отводится 20% и, следовательно, максимальной может быть сумма в 100%.

Внутри каждого критерия существуют оценки качества элемента: отлично — дает полные 20%, очень хорошо — 16%, хорошо — 12%, удовлетворительно — 8%, плохо — 4%, непригодно — 0%. Определив по каждому критерию качество элемента и суммируя числовые характеристики, мы получаем определенное число для каждого рассматриваемого элемента. Очевидно, что наибольшее число будет свидетельствовать о наилучшем соответствии данного элемента проектируемой схеме.

В некоторых случаях процентная разбивка критериев может быть изменена; например, для военного и самолетного оборудования следует увеличить вес критерия надежности и снизить соответственно критерий экономичности.

При помощи этой системы выбирались элементы для вычислительной машины УНИВАК-120. Например, для переключающих схем постоянного тока сравнивались германиевые диоды и газоразрядные лампы. Сумма оценок критериев для германиевых диодов была равна 70% и для газоразрядных ламп — 86%, что дало право выбрать в качестве элементов схем газоразрядные лампы. В. Д. Князев

1888. Опознавание ленты и процедура повторной протяжки для систем, обрабатывающих данные с ленты. Илсон (Tape identifieation and rerun procedures for tape data processing systems. Ellson Leonard), Computers and Automat., 1956, **5**, № 4, 12—13 (англ.)

Запоминание на магнитной ленте широко применяется при обработке больших массивов данных. Обычно катушка ленты, на которую произведена запись, снабжается ярлыком, указывающим содержащиеся в ней данные.

Оператор по мере надобности устанавливает на лентопротяжное устройство катушки с входными данными

и снимает катушки с выходными данными, снабжая их ярлыками. В этих действиях оператора не исключена возможность ошибки.

Для устранения ошибок оператора могут быть применены автоматическое опознавание и повторная протяжка ленты. В начале каждой катушки на ленту выводится опознавательный блок, в котором содержатся все данные, помещаемые обычно на ярлыке. При вводе информации с ленты данные опознавательного блока сравниваются с имеющимися в машине и в случае несовпадения печатается информация о том, что установлена не та катушка. Кроме того, специальная программа подсчитывает выводимые на ленту блоки данных и по окончании вывода указывает на ленте количество этих блоков. При вводе производится подсчет считываемых блоков и в конце полученное число сравнивается с указанным на ленте; в случае несовпадения начинается повторный ввод.

Возможность повторной протяжки обеспечивается тем, что в конце каждой катушки на ленту выводится содержимое запоминающего устройства машины, в котором хранятся опознавательные блоки и количество кодов для входной и выходной лент. Операция повторной протяжки заключается в следующем: если обнаружена ошибка, на лентопротяжный механизм устанавливается та выходная катушка, которая была снята последней. Записанное в конце этой катушки содержимое запоминающего устройства возвращается в машину, которая затем печатает опознавательные данные входной и выходной катушек и оператор производит установку соответствующей ленты.

В больших машинах для вывода содержимого запоминающего устройства на ленту требуется менее 2 сек. и не более 1% полезной емкости катушки.

Н. П. Брусенцов

1889. Вычисления и обработка данных (Computing and data-handling), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 9, 1464, 1466 (англ.).

Рекламные сообщения о новых разработках в области цифровой вычислительной техники.

Быстродействующее печатающее устройство мод. 190, разработанное лабораторией Шепард (Shepard Laboratories), предназначено для печати результатов вычислений со скоростью 108 000 знаков в 1 мин. Число знаков в строке 120. Всего имеется 64 различных знака. Имеется возможность получать большое число копий.

Устройство для взаимосвязи «Интеркуплерс» (Intercouplers) фирмы «Систематикс» (Systematics Inc.) предназначено для обеспечения совместной работы счетных машин серии 3 100 или 3 200 фирмы «Нейшнл Каш Реджистер» (National Cash Register Co.) с перфораторами фирмы ИБМ (мод. 016; 103; 031; 024; 026; 526) или с 5- или 8-позиционным перфолентным оборудованием.

Низкочастотный импульсный генератор мод. 32 фирмы «Доннер» (Donner Scientific Co.) имеет переменную частоту импульсов и малый коэффициент заполнения и предназначен для периодической установки на 0 определенных цепей вычислительной машины.

Устройство магнитной ленты «Irish Instrumentation Tape 311», разработанное фирмой Or Radio Industries, Inc., допускает скорость передачи 15 000 знаков в 1 сек., и предназначено для вычислительных машин и телеметрии.

Вычислительная машина для торговых операций (Univac — File-Computer) разработана фирмой «Ремингтон Ранд».

А. Б. Залкинд

1890. Проектирование триггеров, счетчиков и распределителей. Оберман (The design of triggers, counters and distributors. Oberman R. M. M.), PTT-bedriff, 1955, 6, № 3, 58—74 (англ.; рез. франц., голл.)

Указывается на сложность принципиальных электронных схем и возможность замены часто встречающихся элементов схем символами. Предлагаются символы ряда элементов: усилителей, катодных повторителей, триггеров и др.

Рассматривается применение алгебры цепей к электронным схемам, в частности к триггерам, счетчикам и распределителям.

С помощью алгебры цепей и символов спроектирована триггерная схема, содержащая четыре триода. Введением логических диодов схема сведена к двойному триоду. Этим методом спроектированы различные схемы триггеров и ячейка двоичного счетчика. В качестве переключающего элемента рассматривается конденсатор. В этом случае схема счетчика становится компактнее и менее чувствительна к изменениям питающих напряжений.

Формулы алгебры цепей достаточно просты для релейных схем. При написании их в применении к электронным схемам формулы значительно усложняются. Для упрощения работы предлагается при проектировании электронных схем применение метода проектирования релейных схем. Тогда проектировщик оперирует с символом триггера, как с элементом, подобным тому, каким является реле в релейных схемах. Требования к управляющим сигналам и к обратной связи должны быть сформулированы раздельно. А. В. Аваев

1891. Электронные системы для обработки данных фирмы ИБМ (EDPM-Anlagen der International Business Machines Corporation), MTW-Mitt., 1956, 3, № 1, 35—36 (нем.)

Кратко рассматриваются возможности электронных систем для обработки данных (EDPM — Electronic Data Processing Machines), применяемых в последнее время фирмой ИБМ, и приводятся некоторые их параметры.

ЕДПМ имеют запоминающие устройства как на ферритовых сердечниках (емкостью до 10 000 двоичных разрядов), так и на магнитных барабанах. Емкость каждого барабана может доходить до 60 000 ячеек, скорость вращения до 12 000 об/мин. В некоторых системах ЕДПМ насчитывается до 30 таких барабанов.

Сообщается, что фирма ИБМ пустила в производство запоминающее устройство на магнитных барабанах емкостью 6 000 000 ячеек.

Ввод данных в этих системах, как правило, производится с перфокарт и магнитных лент. В отдельных системах количество блоков магнитных лент может доходить до 100. Каждый сантиметр ленты равноценен емкости одной 80-колонной перфокарты. Перфокарты вводятся со скоростью 200 шт. в 1 мин., магнитная лента протягивается со скоростью 2 *м/сек*.

Результаты вычислений также выводятся на перфокарты и магнитную ленту. Они могут быть напечатаны в виде таблиц при помощи специального печатающего устройства. Скорость печати доходит до 60 000 строк в 1 час. Строка содержит до 120 знаков.

Сообщается, что для полного подсчета и распределения зарплаты 10 000 рабочих и служащих одна из систем ЕДПМ затрачивает менее 4 час., причем собственно счет длится около 30 мин. Г. С. Горячева

1892. Конструирование регулируемого устройства задержки импульсов. Гофф (The development of a variable time delay. Goff Kenneth W.), Proc. IRE, 1953, 41, № 11, 1578—1584 (англ.)

Описывается устройство для задержки импульсов, основанное на использовании магнитного барабана. Устройство содержит цепи запись — считывание; сдвиг импульсов на выходе этих цепей может регулироваться в пределах от —15 мсек. до + 190 мсек.

с точностью $\pm$ 0,2%. Диаметр барабана 203 *мм*, длина 152 *мм*. Подшипники помещены на одной стороне барабана, поэтому можно использовать и внешнюю и внутреннюю его поверхности. Привод барабана для уменьшения вибрации осуществлен через холостой фрикционный шкив.

Устройство предназначено для употребления в различных областях акустики, как то: локализация шумов, анализ реверберации, различные устройства корреляционной техники. Л. В. Кутуков

1893. Перемножатель для моделирующих устройств. Савант, Говард (Multiplier for analog computers. Savant C. J., Jr, Howard R. C.), Electronics, 1954, **27**, № 9, 144—147 (англ.)

Во многих случаях при изучении следящих систем желательно ввести в петлю регулирования нелинейную функцию. Подобные задачи со вводом нелинейной функции обычно не требуют большой точности (до 5%). В предлагаемой статье рассматривается устройство, позволяющее получать произведение нескольких функций $[f(x)]^{\alpha} \cdot [g(y)]^{\beta} [h(z)]^{\gamma}$, где f, g и h — зависимые переменные данной задачи или любые независимые переменные, а α, β и γ могут быть либо положительными, либо отрицательными. Работа перемножателя основывается на правиле логарифмирования произведения:

$$\alpha \log_a f(x) + \beta \log_a g(y) + \gamma \log_a h(z) = \\ = \log_a \{[f(x)]^{\alpha} [g(y)]^{\beta} [h(z)]^{\gamma}\},$$

где $a > 1$.

Суммирование величин в левой части легко осуществимо, а обратный переход от логарифма к числу дает в результате произведение исходных величин.

В перемножателе два перемножаемых напряжения e_1 и e_2 выпрямляются и подаются на схемы преобразования в логарифмический вид; затем после усиления преобразованные сигналы суммируются и поступают на схему обратного преобразования; на выходе стоит устройство подбора знака произведения, которое устанавливает полярность выходного сигнала в соответствии со знаками входных напряжений.

Преобразователь сигнала в логарифмический вид преобразует входное напряжение по правилу $e_{\text{вых}} = -\log_a e_{\text{вх}}$. Схема преобразователя основана на использовании логарифмического вида характеристик лампы 12AX7. Высокое анодное напряжение дает возможность получить преобразование в широком диапазоне входных напряжений от 0,3 до 300 *в*, что дает на выходе от + 3 до — 30 *в*. Поскольку преобразователь работает только на положительных сигналах, то на входе его используется выпрямитель, работающий в диапазоне входных напряжений $\pm$ 150 *в* и дающий на выходе от 0 до +150 *в*. Обратный преобразователь представляет собой сложную многоламповую схему и дает на выходе произведение величин с точностью до 4,4%. Поскольку на выходе обратного преобразователя получаются сигналы только одной полярности, то для установления знака произведения сигнал подается на схему подбора знака, которая в соответствии с сигналами, пришедшими со входа перемножателя, разрешает работу одному из двух усилителей, один из которых переворачивает фазу, а другой не переворачивает.

Приведены примеры использования перемножателя в решении нелинейного дифференциального уравнения и в исследовании работы следящей системы.

В. Д. Князев

1894. Распространение метода образования функциональных зависимостей на механических дифференциальных анализаторах на электромоделирующие устройства. Ририк (Function generation on the differential analyzed extended to the analog computer. Rearick D. F.), IRE Trans. Telemetry and Remote Control., 1955, **1**, № 3, 8—12 (англ.)

Описан способ образования элементарных функциональных зависимостей — экспоненциальной, логарифмической, показательной, тригонометрических и т. п.— путем решения вспомогательных дифференциальных уравнений с помощью фрикционных интеграторов, входящих в состав механического дифференциального анализатора, и приведены некоторые примеры. Отмечается возможность перемножения двух переменных с помощью двух интеграторов и одного сумматора. Указывается, что применение описанного способа образования функциональных зависимостей в электрических моделирующих устройствах затруднено, так как в последних интегрирование может производиться лишь по времени.

Приведены примеры преобразования системы дифференциальных уравнений, обеспечивающего применение метода решения вспомогательных дифференциальных уравнений для образования функциональных зависимостей с помощью типовых блоков электромоделирующих устройств и сводящегося к замене независимой переменной x пропорциональной ей величиной t ($x = kt$) или к замене приращения переменной dy равным ему произведением ydt. В последнем случае для образования функциональной зависимости требуется, кроме интегратора, блок перемножения подинтегральной функции на производную y, которая, как правило, имеется в электрическом моделирующем устройстве.

Указано, что для определения вида дифференциального уравнения, решением которого является требуемая функциональная зависимость, можно применить преобразование Лапласа (приведен пример для получения зависимости $z = \sin \omega t$) или более общий метод, заключающийся в дифференцировании заданной зависимости по независимой переменной, подстановке в правую часть заданной функциональной зависимости, повторении этих операций в случае необходимости. Для второго способа приведен пример образования дифференциальных уравнений для получения зависимостей $z = \operatorname{tg} \omega t$ и $z = t^2$. Испытания метода производились на электромоделирующем устройстве фирмы «Сперри» (Sperry), причем погрешность лежала в пределах 1%.

И. М. Витенберг

1895. Прибор для решения алгебраических уравнений. Адлер (Ein Gerät zur Auflösung von Polynomgleichungen. Adler Helmut), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1955—1956, **5**, № 1, 1—4 (нем.)

Описывается принципиальная схема электрического прибора для решения уравнений с действительными коэффициентами $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$, где $n \leqslant 8$. Искомое решение находится в виде $z = v + ju = re^{j\varphi}$.

Искомые величины выражаются через напряжения в электрической схеме, состоящей из трансформаторов и автотрансформаторов. Первая группа трансформаторов, подключенная к стабилизированному источнику питания, служит для получения девяти независимых напряжений, пропорциональных коэффициентам рассматриваемого уравнения (a_i). Трансформаторы этой группы соединены тремя последовательными ступенями, что позволяет устанавливать напряжения с точностью до трех знаков. Напряжения, пропорциональные коэффициентам a_i, подаются на 9 автотрансформаторов, каждый из которых имеет по 20 выводов. Выводы выполнены таким образом, чтобы на выходе этих авто

трансформаторов получить напряжения, пропорциональные — $a_i r^i$.

Последняя группа из 9 трансформаторов обеспечивает получение на выходе напряжений, пропорциональных — $a_i r^i e^{j\varphi_i}$, сумма которых подается на нуль-индикатор. Суммарная погрешность прибора 1,5%.

А. А. Крюков

1896. **Общий усилитель системы операционных усилителей стабилизированной электромодели. Слотер** (Time-shared amplifier stabilizes computers. Slaughter Dean W.), Electronics, 1954, 27, № 4, 188—190 (англ.)

Рассматриваются два варианта схемы общего усилителя системы стабилизированных операционных усилителей. Общеизвестная схема, основанная на усилителе переменного тока с *RC* цепочками, достаточно проста, но она не может нормально работать, когда один из операционных усилителей системы выходит из рабочего режима. Нарушение нормальной работы происходит вследствие заряда емкостей *RC* связей до значительных потенциалов.

От указанного недостатка свободен второй вариант схемы, построенный на усилителе постоянного тока с входным каскадом, работающим в «умирающем» режиме.

Усилитель имеет внутри обратную отрицательную связь по постоянному току, а на выходе двойной «*Г*»-образный *RC* фильтр. Общий коэффициент усиления по постоянному току 750. При выходе в системе с таким общим усилителем одного из операционных усилителей из нормального режима на соседнем операционном усилителе максимальное смещение достигает всего лишь 30 *мв*.

Г. М. Петров

1897. **Устройство для интегрирования медленно меняющейся функции времени, задаваемой в виде угла поворота. Пальтов И. П.,** Автоматика и телемеханика, 1956, 17, № 4, 296—309

Отмечаются достоинства электромеханической схемы для интегрирования медленно меняющихся величин и указывается, что основным источником погрешности интегрирования, когда входная величина задана в виде угла поворота вала, является потенциометрическая схема преобразования этого угла во входное напряжение схемы.

Описывается предложенная автором электромеханическая схема, состоящая из магнитного тахометрического узла, скорость вращения магнита которого определяется положением вала входной величины. Это достигается с помощью контактной системы, связывающей вал входной величины с измерительным валом тахометрического узла и включающей или выключающей двигатель вращения магнита. Выходная величина отсчитывается числом оборотов вала магнита. Описанное устройство всегда работает в режиме автоколебаний. Приводится исследование частоты и амплитуды автоколебаний для скользящих и соударяющихся управляющих контактов.

Показано, что система с соударяющимися контактами является более рациональной.

И. М. Витенберг

1898. **Применение электролитической аналогии к задачам промышленных исследований. Жермен** (Applications de l'analogie rhéoélectrique à des problèmes de recherches industrielles. Germain P.), Rev. Soc. roy. belge ingrs et industriels, 1955, № 12, 479—493 (франц.)

Распределение потенциала в однородной изотропной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа; это дает возможность моделировать широкий класс задач, требующих решения этого уравнения. Применяются два типа проводящих сред: тонкий слой графита, нанесенного на изолирующую подложку (бумага «теледельтос»), и жидкий электролит (водопроводная вода). Граничные условия реализуются приданием токоподводящим электродам соответствующей формы. Графитовая бумага дает решение плоских задач; электролитическая ванна пригодна и для пространственных; в частности, плоское наклонное дно дает решение для задач с цилиндрической симметрией. Потенциалы точек снимаются специальным зондом и измеряются компенсационным методом, не искажающим распределение потенциалов. Применена автоматическая компенсация с одновременным нанесением точек на график. Для питания установки с графитовой бумагой используется постоянное напряжение в несколько вольт. Электролитические ванны питаются переменным током с частотой 500—1000 *гц*. Решение задачи на графитовой бумаге занимает 1—2 дня, в ванне — 1—2 недели, причем достигается более высокая точность, до 1%. В Институте прикладной физики Брюссельского университета изложенным методом решены задачи о распределении температуры и теплового потока в коксовой печи, о распределении электрического потенциала в ионизационной камере и о зависимости подъемной силы крыла самолета от угла атаки. В каждом случае приведены формулы для определения масштабных коэффициентов. Приводятся фото установок и их отдельных узлов.

И. В. Лебедев

1899. **Недорогое моделирующее устройство. Джонс** (Low-cost analog computer. Jones Chalmer E.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 11, 1914—1915 (англ.)

Кратко описано сравнительно недорогое моделирующее устройство с 15 усилителями и 30 компенсированными потенциометрами. Применяются источник опорного напряжения 100 *в* и схема делителей напряжения на 1000 ступеней. Это позволило с точностью до 0,1% измерять напряжения, характеризующие установку коэффициентов, общее усиление усилителя, установку начальных условий, установку смещений на диодах, аппроксимирующих различные нелинейные функции, напряжения срабатывания реле. Конструкция усилителей рассчитана на минимальное число штекеров и соединительных проводов.

Н. Г. Черняк

1900. **Электронные моделирующие устройства. Ч. I. Моронн** (Macchine calcolatrici elettroniche analogiche. P. 1. Moroni Sergio), Antenna, 1955, 27, № 9, 230—234 (итал.)

Краткое изложение принципов действия моделирующих устройств. Даны блок-схемы решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения 1-го и 2-го порядка с помощью интегратора. Описаны две схемы на потенциометрах с усилителями для решения системы линейных алгебраических уравнений. В первой схеме значения неизвестных определяются при уравновешивании моста; во второй — решение достигается методом последовательных приближений, эта схема может дать более высокую точность. Приведена фотография моделирующего устройства OMEL2 (18 установочных потенциометров и 12 усилителей) (РЖМат, 1956, 5570—5571).

И. В. Лебедев

1901. **Электронные моделирующие устройства. Ч. 2. Моронн** (Macchine calcolatrici elettroniche analogiche. P. 2. Moroni Sergio), Antenna, 1955, 27, № 10, 262—266, 279 (итал.)

Описываются различные моделирующие устройства для моделирования функций времени. Даны схемы усилителя постоянного тока и контуров с усилителем, осуществляющих различные математические зависимости, блок-схемы множительного и делительного устройств. Приведена схема для решения уравнения $y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0$ с помощью синусно-косинусных потенциометров. Рассмотрена блок-схема счетно-ре

шающего прибора для управления артиллерийским зенитным огнем. Задача встречи решается в прямоугольных координатах. Приведена схема для решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка. И. В. Лебедев

1902. Моделирующее устройство фирмы «Уибер Эйркрафт» (Weber Aircraft computer), Interavia Air Letter, 1956, № 3385, 6 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Уибер Эйркрафт» о разработке моделирующего устройства для решения линейных дифференциальных уравнений двенадцатого порядка. Простота эксплуатации позволяет использовать в качестве оператора любого конторского служащего без специальной подготовки. Устройство имеет всего 4 переключателя и шкалы для установки коэффициентов. А. Б. Залкинд

1903. Изучение характеристик самолетов с помощью моделирующих устройств. Уэйдел, Вань (Aircraft performance studied on an electronic analog computer. Wadel L. B., Wan C. C.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 78—82 (англ.)

Описывается применение моделирующих устройств при вычислении наивыгоднейшей трассы полета бомбардировщика и наивыгоднейшего профиля подъема истребителя. Анализируется случай полета истребителя с наименьшим временем набора высоты и случай полета бомбардировщика с максимальной дальностью. Результаты расчетов приведены в виде графиков коэффициента перегрузки при равномерном вираже, времени поворота при постоянном коэффициенте перегрузки и скороподъемности в зависимости от числа M. Даны результаты расчета наивыгоднейшей трассы полета бомбардировщика. Сходимость полученных результатов с результатами, полученными при вычислении обычным ручным способом, удовлетворительная.

При решении задач подобного рода в моделирующем устройстве в качестве интеграторов используется менее 5% усилителей. Необходимо большое количество множителей и функциональных генераторов.

Как указывают авторы, изготовлено несколько моделирующих устройств, предназначенных для расчетов характеристик истребителей. Возможность исследования характеристик бомбардировщиков с помощью таких средств изучается. В. А. Комаров

1904. Вычислительное устройство с системой преобразования данных для радиопеленгатора. Бейли, Сиднор (A radio direction finder bearing computer and data reduction unit. Bailey Albert E., Sydnor Richard L.), Proc. Nat. Electronics Conf. 11. Chicago, 1955.Chicago 1956, 753—765 (англ.)

Описывается схема вычислительного устройства «Марк-III», построенного в Иллинойском университете. В устройстве процесс определения пеленга полностью автоматизирован и не требует вмешательства оператора. Он производится вычислением отношения амплитуд двух синусоидальных напряжений, принятых двумя перекрестными рамками антенны. При вычислении угла направления пеленга тангенс отношения амплитуд заменяется линейной функцией отношения амплитуд, что в диапазоне $\pm 12{,}5°$ приводит к погрешности в 0,2°; вычисление угла в диапазоне $45 \pm 10°$ производится определением логарифма отношения амплитуд, что также приводит к погрешности в 0,2°.

Вычислительное устройство состоит из устройства совмещения пеленга, обеспечивающего преобразование координат для обеспечения работы схемы определения угла в зоне около 45°, собственно вычислителя пеленга, усредняющего устройства, исключающего случайные измерения, и источников питания. Устройство совмещения использует плоские косинусно-синусные потенциометры типа PVPS-5269, на которые поступают входные напряжения от рамок антенны. Выходными величинами устройства совмещения являются два синусоидальных напряжения, дополнительно повернутые на угол поворота ползунков потенциометров. Эти напряжения в определенные моменты времени, 25 раз в 1 сек., поступают в вычислительное устройство, в котором и производится определение угла как разности логарифмов входных величин. Подключение входных напряжений производится с помощью релейной коммутации, обеспечивающей малую постоянную времени цепи заряда конденсатора и большую постоянную времени цепи разряда. В качестве интегратора с временем интегрирования в несколько минут используется схема интегрирующего усилителя.

Общая погрешность определения пеленга лежит в пределах $\pm 0{,}6°$. И. М. Витенберг

1905. Измерение непрерывных данных и преобразование их в цифровую форму. Флетчер, Уокер (Analog measurement and conversion to digits. Fletcher Taylor C., Walker Norman C.), ISA Journal, 1955, 2, № 9, 341—345 (англ.)

Рассматривается преобразование измеряемого напряжения в цифровую форму, причем наиболее подробно рассмотрены три системы: 1) преобразование входного напряжения в механическое положение кодового диска; 2) вычитание эталонных напряжений из входного напряжения посредством использования реле; 3) сравнение искомого напряжения с напряжением, эталонно-меняющимся во времени.

В первой системе напряжение преобразуется посредством сервосистемы в поворот вала, на котором укреплен кодовый диск. При использовании кодового диска с обычным двоичным кодом неопределенное положение диска, при котором ощупывающие щетки или луч проходят по границе двух соседних положений диска, приводит к значительным ошибкам. Последнее устраняется при использовании рефлексного кода. При этом ошибка из-за неопределенного положения диска не может превышать значения младшего разряда. Неопределенность может быть исключена механическим фиксатором положения диска, который в момент снятия показаний устанавливает диск так, что щетки или луч попадают на радиус, проходящий по центру одного из младших разрядов. Преобразователь, использующий сервосистему с кодовым диском, имеет то преимущество, что скорость его не зависит от используемого кода. Таким же образом можно получить на выходе преобразователя код, не только соответствующий повороту вала, но и любой функции от угла поворота. Скорость такого преобразователя не превышает одной выдачи данных в 1 сек.

Вторая система преобразования предусматривает вычитание из искомого напряжения эталонных напряжений, величины последних зависят от системы счисления, в которой должно быть представлено искомое напряжение. Устройство, реагирующее на разность этих двух напряжений, управляет подключением реле, через контакты которых подается определенная часть эталонного напряжения. Таким образом добиваются минимального значения разбаланса. При этом состояние реле представляет значение искомого напряжения в цифровой форме. В этой системе используется сумматор для токов или напряжений, подаваемых от отдельных реле. Быстродействие системы, определяемое быстродействием реле, составляет 10 выдач данных в 1 сек. Надежная непрерывная работа реле гарантируется на 30 000 час. Недостатком такой системы является невозможность получения цифрового представления произвольной функции.

Третья система предусматривает преобразование напряжения в импульсы различной длительности при

одновременном измерении этой длительности в цифровой форме. Такая система может использовать генератор пилообразного напряжения, сравниваемого с эталонным напряжением, и счетчик эталонной частоты импульсов, интервал работы которого определяется запуском пилообразного генератора, с одной стороны, и моментом равенства пилообразного напряжения и искомого напряжения, с другой стороны. Точность такой системы зависит от линейности и точности момента запуска пилообразного генератора, стабильности эталонного генератора импульсов и точности системы, определяющей момент, когда разность между пилообразным напряжением и искомым станет равной нулю. Преимущество этой системы состоит в том, что преобразовние данных и их выдача в цифровой форме может производиться до 100 раз в 1 сек. Рассматривается несколько разновидностей этой схемы преобразования.

Приводятся принципы построения аналогичных преобразователей при использовании электроннолучевых трубок и некоторые другие. Библ. 86 назв.

А. Б. Залкинд

1906. Преобразователь непрерывных данных в цифровую форму (Analog-digital converter), Nucleonics, 1955, **13**, № 8, 68 (англ.)

Сообщение о преобразователе непрерывных данных в цифровую форму фирмы «Норден Кетей» (Norden-Ketay Corp.). Устройство преобразует несколько непрерывных величин, попеременно подаваемых на его вход, в цифровой код из 13 двоичных разрядов. Габариты преобразователя 43×68 *мм*. А. Б. Залкинд

1907. Преобразователь непрерывной информации в цифровую форму (Analog to digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 11, 1091 (англ.)

Рекламное сообщение о разработанном фирмой «Либраскоп» (Librascope, Inc.) устройстве для преобразования положения вала в дискретную форму. Преобразователь использует диск с проводящими и непроводящими сегментами, позволяющий получать кодированные числа от 0 до 199. Этот диапазон может быть увеличен до 19 999 за счет подсоединения дополнительных кодовых дисков. Преобразователь не реагирует на перегрузки и удары до 20 *g*. Допустимо изменение окружающей температуры в пределах от —50 до + 83°.

А. Б. Залкинд

1908. Электронный счетчик (Electronic counter), Mech. Engng, 1956, **78**, № 2, Keep Inform., 43 (англ.)

Рекламное сообщение о выпуске фирмой «Уэстпорт Электрик» (Westport Electric) десятичного электронного счетчика *WE*-120. Счетчик состоит из 5 декад, имеет объем 0,02 $м^3$. Для представления насчитанного числа используются газоразрядные лампы с холодным катодом. Диапазон частот входных импульсов составляет от 10 *гц* до 100 *кгц*. Чувствительность прибора обеспечивает его работу при амплитуде поступающих импульсов 50 *мв*. Точность счета ± 1 младшего разряда.

А. Б. Залкинд

1909. Ячейка для хранения двоичного разряда, использующая электрооптическую обратную связь. Милч (Bit storage via electro-optical feedback. Milch Alfred), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, **4**, № 4, 136—144, 160 (англ.)

Приводится описание элемента для запоминания двоичной информации, использующего преобразование световой энергии в электрическую и снова в световую в цепи обратной связи. Для этого была разработана лампа с фоточувствительным катодом и люминесцентным анодом. Фотоны, выделяемые анодом, используются для воздействия на катод уже вне оболочки лампы, что позволяет применять линзы и другие оптические приборы. Приводятся данные о разработанном приборе и даются критерии для требуемой обратной связи.

А. Б. Залкинд

1910. Заметка о запоминающем устройстве на магнитном барабане. Фридман (A note on magnetic drum storage. Freedman A. L.), Bull. Res. Council Israel, 1955, **A5**, № 1, 71 (англ.)

Описывается метод поиска зоны на дорожке магнитного барабана, снабженной 8 головками.

И. К. Волков

1911. В машине УНИВАК используются реле фирмы «Эберт Электроникс» (Univac uses Ebert relays), Instrum. and Automat., 1955, **28**, № 8, 1217 (англ.)

Сообщается, что в машине УНИВАК-120 применяются ртутные реле плунжерного типа фирмы «Эберт Электроникс» (Ebert Electronics Corp.). Реле марки EM-7 используются для включения главной цепи питания. Реле марки EM-1 включают первичные цепи накала и цепи постоянного тока. А. И. Щуров

1912. Миниатюрные соленоиды для авиационных вычислительных машин (Miniature solenoids for computers, aircraft), Electronics and Communs, 1955, **3**, № 5, 98 (англ.)

Фирма PSP Engineering Co. сообщает о миниатюрных соленоидах для электронной автоматики, имеющих малый ход сердечника. Типичные характеристики: усилие, прикладываемое к сердечнику, равно 3 *кг* при ходе 0,5 *мм*; соленоид SD-328 потребляет 0,51 *а* при 24 *в* постоянного напряжения; рабочее напряжение 18—30*в*; диапазон окружающей температуры—20÷+75°.

А. Н. Зимарев

1913. Устройство цифровой печати фирмы «Толли Реджистер» (Tally Register digital point plotter), Electronics and Communs, 1955, **3**, № 5, 97 (англ.)

Сообщение фирмы «Толли Реджистер» о выпуске печатающего устройства типа 8113 мод. 3, управляемого непосредственно от электронной вычислительной машины, перфокартной машины, перфоленты или клавиатуры. Устройство печатает буквенно-цифровую информацию со скоростью 10 знаков в 1 сек. Кроме того, устройство может печатать кривые по принимаемым цифровым данным. Печать кривых производится 4 символами со скоростью 20 точек в 1 сек. А. Б. Залкинд

1914. Быстродействующий счетчик на кристаллических триодах с поверхностным барьером. Готт (High-speed counter uses surface-barrier transistor. Gott Euyen), Electronics, 1956, **29**, № 3, 174—178 (англ.)

Описывается быстродействующий реверсивный двоичный счетчик на кристаллических триодах с поверхностным барьером, используемый для определения наличия модуляции частоты импульсов или для определения разницы в количестве импульсов между последовательными сериями импульсов. Счетчик работает на частоте 6 *Мгц*.

Приводятся блок-схема и полная принципиальная схема четырехразрядного счетчика с описанием его работы. Основное внимание уделено пассивным элементам схемы, определяющим скорость ее работы. Подробно описывается основной элемент счетчика — триггерная схема. Даны временные диаграммы колебаний в различных точках счетчика. Б. И. Стрелков

1915. Мощные кристаллические триоды фирмы «Сильвания» (Sylvania power transistors), Computers and Automat., 1955, **4**, № 6, 143 (англ.)

Сообщение фирмы «Сильвания» (Sylvania Electric Products Inc.) о новых разработанных кристаллических триодах 2N68 и 2N95, допускающих рассеивание мощности без принудительного охлаждения 2,5 *вт*. При дополнительном охлаждении допускаемая рассеиваемая мощность возрастает до 5 *вт*. При работе в классе А эти триоды обеспечивают усиление по мощности не менее 20 *дб*.

Сообщается также о промышленном выпуске высокочастотных триодов 2N94(*n-p-n*), 2N94A (*n-p-n*) с $\alpha > 0{,}95$ и усилением по мощности свыше 40 *дб*, низкочастотных триодов 2N35 (*n-p-n*) и 2N34(*p-n-p*), кремниевых слоевых диодов 1N137A и 1N138A; кремниевых точечно-контактных диодов 1N193, 1N194, 1N195, 1N196, предназначенных для работы в вычислительных машинах с временем переходных процессов, не превышающем 0,1 *мксек*. А. Б. Залкинд

1916. Двухтактные полупроводниковые триоды (Push-pull transistors), Instrum. and Automat., 1954, **27**, № 2, 196 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о параллельном включении двух плоскостных кристаллических триодов типа *p-n-p* и *n-p-n* для упрощения двухтактных схем. А. Н. Зимарев

1917. Монтаж полупроводникового триода в вакуумплотном корпусе (Evacuated transistor mounts), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 3, 352, 354 (англ.)

Утверждается, что помещение кристаллических триодов в вакуум является окончательным решением задачи о защите триода от влаги. А. Н. Зимарев

1918. Межштатная страховая компания использует вычислительную машину (Allstate uses computer), Instrum and Automat., 1955, **28**, № 10, 1598 (англ.)

Сообщение компании «Оллстэйт Инсюренс» (Allstate Insurance Co.) об установке электронной вычислительной машины «Дататрон» для сокращения времени на обработку 3 миллионов страховых полисов. Указывается, что 1800 человеко-часов, затрачиваемых на составление квартального отчета, были сокращены до 100 час. работы на конторских машинах и затем до 12 час. работы электронной вычислительной машины. Ожидается, что «Дататрон» окупит себя за 2 года. А. Б. Залкинд

1919. Восточная объединенная конференция по вычислительным машинам. Бостон, 7—9 ноября 1955 г. (Eastern joint computer conference. Boston, Mass. November, 1955. Advance Program), Computers and Automat., 1955, **4**, № 11, 12—13 (англ.)

Приводится программа конференции и тезисы сделанных на ней 11 докладов. И. К. В.

1920. Проектирование, постройка и применение электронных вычислительных машин. Гранди, Россе (The design, construction and applications of electronic digital computers. Grundy E., Ross H. McGregor), Trans. S. Afric. Inst. Electr. Engrs. 1955, **46**, № 10, 261—294 (англ.)

Популярная статья из восьми разделов: 1) краткая история вычислительных устройств; 2) что такое вычислительная машина; 3) типы запоминающих устройств, применяемых в вычислительных машинах; 4) ввод и вывод; 5) применение вычислительных машин; 6) автоматические процессы и управление с помощью машин; 7) вычислительные машины сегодня и возможности в будущем; 8) библиография. Б. И. Шитиков

1921. Автоматическое справочное бюро. Гриффит (Automatic, answering of inquiries. Griffith L. E.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 11, 6—8 (англ.)

Общие соображения о применении машин для создания автоматических справочных бюро. Рассматриваются области, в которых автоматические справочные бюро могут найти применение. К ним автор относит, в частности, городские автоматические справочные бюро, почту, гостиницы, аэропорты, универсальные магазины, госпитали и др.

Дается схема, демонстрирующая применение автоматической машины в госпитале. И. М. Старостин

1922. Материалы летней сессии Мичиганского университета по вычислительным машинам. Карр, Скотт (University of Michigan summer session notes on computers and data processors. Carr John W., Scott Norman R.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 11, 9, 16 (англ.)

Работа сессии проводилась в следующих секциях: программирование цифровых машин, их структура и применение; деловые операции; логическое и конструктивное выполнение узлов; научные и инженерные расчеты (математические основы и методы решения задач); доклады потребителей (17 докладов по результатам использования вычислительных машин); новые достижения. И. К. Волков

1923. Современная конторская машина будет работать. Маршалл (This modern office machine has come to stay. Marshall A. H.), Municip. J., 1955, **63**, № 3258, 2018—2019 (англ.)

Статья является продолжением обзора годичного опыта работы цифровой электронной вычислительной машины в вычислительном бюро казначейства города Ковентри (Англия) (РЖМат, 1956, 6954).

Большое место уделяется возникающим трудностям в связи с отсутствием квалифицированного персонала.

Экономичность работы в подобном вычислительном бюро зависит от правильного ее планирования. Поскольку электронная вычислительная машина имеет большие скорости работы, то необходимо для ее полной загрузки правильно распределять работу между машиной и табуляторами.

В заключение автор отмечает, что год эксплуатации машины показал хорошую работоспособность небольших электронных вычислительных машин стоимостью до 100 тыс. фунтов стерлингов. В. Д. Князев

1924. Математическое машиностроение и приборостроение (Конференция по вычислительной технике). Визун Ю. И., Вестн. АН СССР, 1956, № 5, 89—94

12—17 марта 1956 г. в Москве состоялась конференция по вопросу о путях развития советского математического машиностроения и приборостроения, созванная по инициативе АН СССР, Министерства приборостроения и средств автоматизации СССР и других ведомств. В работе конференции приняли участие советские ученые и инженеры, занимающиеся вопросами разработки производства и эксплуатации математических машин и приборов, и зарубежные гости.

В заслушанных на пленарных заседаниях обзорных докладах освещалось состояние работ по вычислительной технике в СССР и за рубежом, основные направления работ в области математического машиностроения и приборостроения, вопросы, касающиеся решения математических и логических задач и их программирования на быстродействующих электронных вычислительных машинах.

На заседаниях секции универсальных машин обсуждались вопросы конструкций и опыта эксплуатации некоторых отечественных и зарубежных вычислительных машин (БЭСМ — быстродействующая электронная машина АН СССР, «Стрела-1» — машина Министерства приборостроения и средств автоматизации, М-2 — вычислительная машина Энергетического института АН СССР, САПО — чехословацкая быстродействующая вычислительная машина).

Большое внимание было уделено запоминающим устройствам вычислительных машин на электроннолучевых трубках, на ферритовых сердечниках (внутренние оперативные запоминающие устройства) и на магнитных барабанах и лентах (внешние запоминающие устройства).

В ряде докладов были отражены работы по внедрению полупроводниковых приборов в устройства вычислительной техники, а также новые схемы с применением динамических элементов.

На математической секции были рассмотрены методы

программирования и опыт решения различных математических задач на современных вычислительных машинах, а также вопросы применения машин для автоматизации перевода с одного языка на другой. Опыт автоматического перевода на машине БЭСМ показал полную техническую возможность машинного перевода с английского языка на русский. Было сообщено о подготовке опытов по машинному переводу с французского языка на русский на машине «Стрела-1».

На заседании секции специализированных машин были сделаны доклады о специализированных машинах типа «Кристалл», предназначенной для решения кристаллографических задач, и типа «Погода», приспособленной для вычисления сумм парных произведений.

Моделирующим устройствам были посвящены доклады: о моделирующем устройстве «Арал II» для решения системы 12-линейных уравнений с 12 неизвестными (Польская Народная Республика) и о электронном моделирующем устройстве для решения проблем автоматического регулирования (Сербская академия наук). В. П. Кузнецова

1925. Новая электронная вычислительная машина для PAA (New electronic brain for PAA), Pakistan Economist, 1955, **7**, № 21, 20 (англ.)

Сообщается, что машина для обработки данных ИБМ-705 используется компанией «Пан Америкен Уорлд Эйруейз» (Pan American World Airways). Машина выполняет 8400 сложений или 1200 делений в 1 сек. Значительный рост объема перевозок на авиалиниях не мог быть обеспечен при обработке документации прежними способами. А. Б. Залкинд

1926. Фирма «Электродэйта» заканчивает переезд в новое производственное помещение площадью 3636 *м*² (Electro-Data completes move to new 40 000-Sq. Ft. plant), West. Metals, 1955, **13**, № 9, 80 (англ.)

Сообщение о переезде фирмы «Электродэйта» в новое производственное помещение, сопровождающемся расширением и реорганизацией выпуска продукции и разработкой новых машин. А. Б. Залкинд

1927. Вычислительная машина типа ИБМ-650 с запоминающим устройством на магнитном барабане (IBM — Magnettrommelrechner Type 650 (EDPM)), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 3, 139—140 (нем.)

Сообщаются некоторые данные электронной десятичной вычислительной машины типа ИБМ-650. За последние два года было выпущено более 1000 машин этого типа.

Запоминающим устройством в машине служит магнитный барабан емкостью 2000 десятиразрядных десятичных чисел. Арифметическое устройство может выполнять за 1 сек. 200 сложений или вычитаний, 60 умножений (произведение 20-значное), 50 делений 20-значных чисел на 10-значные с образованием 10-значного остатка. Вывод результатов происходит со скоростью 100 перфокарт в 1 мин.

Приводится список американских и иностранных фирм, которые применяют вычислительную машину ИБМ-650. Г. С. Горячева

1928. Цифровая автоматика. Клейн, Вильямс, Морган (Digital automation. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1955, **28**, № 11, 1930—1936 (англ.)

Подробно и в доступной форме излагаются: 1) представление чисел в двоичной системе, 2) арифметические действия над двоичными числами, 3) восьмеричная и бинарно-кодированная десятичная системы, 4) разновидности бинарного кодирования: рефлексное кодирование, кодирование с излишком 3, кодирование с весами разрядов 1,2,4,7. Н. П. Брусенцов

1929. Использование больших вычислительных машин в фотограмметрии. Брандт (Use of large capacity computers in photogrammetry. Brandt Robert S.), Photogramm. Engng, 1955, **21**, № 5, 695—696 (англ.)

Как пример использования для целей фотограмметрии больших вычислительных машин приводится применение машины УНИВАК для корректировки воздушной триангуляции картографической службой Вооруженных сил США. В настоящее время автоматические вычисления ведутся для горизонтальной триангуляции; в будущем предполагается производить аналитически также и вертикальную триангуляцию, используя для этой цели УНИВАК. В. Д. Князев

1930. Малогабаритное моделирующее устройство (Small analogue computer), J. Scient. Instrum., 1955, **32**, № 10, 407 (англ.)

Сообщение Отделения электроники фирмы «Сандерс-Рое» (Saunders-Roe Ltd. Electronics Division) о выпуске малогабаритного моделирующего устройства для решения линейных дифференциальных уравнений. Машина состоит из десяти усилителей с коэффициентом усиления 1500, дающих на выходе положительные или отрицательные сигналы, двадцати потенциометров, градуированных с точностью до 0,7%, для задания коэффициентов, двухлучевой электростатической трубки с временем развертки 10, 20 или 40 мсек, наборной панели для соединения элементов схемы А. А. Крюков

1931. Первая в мире вычислительная машина, использующая кристаллические триоды (World's first transistorised computer), Brit. Communs and Electronics, 1956, **3**, № 2, 69 (англ.)

Рекламное сообщение о демонстрации вычислительной машины ИБМ-608 на кристаллических триодах.

1932. Электронная вычислительная машина с большим запоминающим устройством. Рейхель (Elektronengehirne mit größerem Gedächtnis. Reichel), Bürotechn. Organis., 1956, **4**, № 1, 23 (нем.)

Сообщается, что фирма RCA проводит экспериментальные работы с вычислительной машиной, имеющей запоминающее устройство матричного типа на 10 000 магнитных сердечниках. Н. П. Вашкевич

1933. Автоматизация конторских работ (Automatic office), Instrum. Practice, 1956, **10**, № 1, 54 (англ.)

Отмечается превосходство коммерческой электронной машины ЛЕО в скорости и полной автоматизации выполнения конторских работ над подобными машинами США. Эта машина, помимо составления платежных ведомостей на 10 000 служащих, выполняет работу по подсчету требований на потребление 250 видов товаров для 150 торговых точек. В данный момент машина ЛЕО заменяет работу 200 конторских служащих (максимально может заменить 320). Для обслуживания машины необходимо 6 человек. Предполагается серийный выпуск этих машин для различных применений в области автоматизации конторских работ. Стоимость машины 75 000 фунтов стерлингов. О. К. Щербаков

1934. Электронная вычислительная машина для Национального исследовательского совета. Бертини (Un cervello elettronico per il Consiglio Nazionale delle Ricerche. Bertini Monaldo), Sci. e vita, 1955, **7**, № 75, 368—371 (итал.)

Сообщается об установке в Институте прикладных вычислений Национального исследовательского совета в Риме электронной вычислительной машины фирмы «Ферранти». Наряду с популярными рассуждениями о роли электронных вычислительных машин, приводятся некоторые данные: скорость работы — 500 умножений двух десятизначных чисел за 2 сек., запоминающее устройство на 30 000 шестизначных чисел с временем выбора 1/30 сек. И. В. Лебедев

1935. Использование машины АЛЬВАК III для исследовательской работы в Институте технологии газа

(Use «Gas brain» to aid IGT research), Industr. Labs, 1955, 6, № 7, 16 (англ.)

Исследования, проводимые Институтом технологии газа (IGT), который является филиалом Иллинойского технологического института, связаны с большим объемом вычислений по составу газа, температурам пламени, термодинамическим свойствам и др. Применение для этих целей вычислительной машины АЛЬВАК III, построенной фирмой «Лоджистикс Рисёрч», позволило, например, произвести расчет теоретической температуры пламени за 8—10 мин., в то время как вычислителю-человеку на это требуется 1—2 недели.

А. Б. Залкинд

1936. **Новый вычислительный центр** (New computing center), Instrum. and Automat., 1955, **28**, № 10, 1596 (англ.)

Сообщается, что Корпорация ядерных исследований (Nuclear Development Corp. США) организует в Уэстчестере (Westchester) вычислительный центр, который будет выполнять расчеты по проектированию реакторов, а также брать работы со стороны. Первой машиной в этом центре будет «Дататрон» (Datatron) фирмы «Электродейта» (Electro-Data Corp.). А. Б. Залкинд

1937. **Применение вычислительных машин. Миньо** (Applications des machines à calculer. Mignot Noël), Rev. gén. méc., 1956, **40**, № 85, 1—6 (франц.)

Общие рассуждения о назначении и использовании современных вычислительных машин. Перечисляются организации, занимающиеся вычислительными работами. В США, по утверждению автора, нет университета, при котором не было бы вычислительной лаборатории. В Германии работу ведут Высшая техническая школа в Дармштадте и Технический университет в Берлине; в Бельгии — лаборатория под руководством проф. Гофмана при Брюссельском университете; в Риме — лаборатория проф. Пиконе. В Англии — Национальная физическая лаборатория, Кембриджский, Саусемптонский и Бирмингамский университеты, Имперский колледж наук и технологии. Во Франции существуют два вычислительных центра — в Институте Паскаля и в Гренобльском университете; автор считает необходимым для удовлетворения потребностей страны увеличить это число в 10 и даже 20 раз.

И. В. Лебедев

1938. **Перспективы применения вычислительных машин. Росс** (Future applications of digital computers Ross H. McG.), Instrum. Practice, 1955, **9**, № 10, 973—976 (англ.)

Сообщается о широком развитии и применении электронных вычислительных машин за последнее десятилетие, что объясняется возможностью использования этих машин в решении разнообразных задач. Перечисляются простейшие операции, выполняемые машинами. Описывается процесс математической подготовки задач и программирования. Рассматриваются перспективы применения вычислительных машин в науке и технике.

В последнем разделе статьи рассматриваются коммерческие применения вычислительных машин.

В. П. Смирягин

1939. **Вычислительная машина Массачусетского технологического института анализирует мозговые волны** (MIT computer analyzes brain waves), Electr. Engng, 1955, **74**, № 9, 856—857 (англ.)

Сотрудниками Массачусетского технологического института и Массачусетской главной больницы проводятся испытания вычислительной машины — коррелятора-аналога, созданной в 1955 г. Эта машина записывает электрические колебания, возникающие в мозгу, на магнитную ленту, обрабатывает их и печатает кривую деятельности мозга в выбранный промежуток времени.

А. М. Жданов

1940. **Первая международная выставка электрического оборудования. Филадельфия, 13—24 сентября 1954 г.** (First international instrument exposition. Philadelphia: 13—24 septembre 1954), Mesures et contrôle industr., 1954, **19**, № 211, 775—780 (франц.)

На выставке было представлено различное электрическое оборудование и в том числе моделирующие вычислительные устройства США, Англии, Франции, Швеции, Швейцарии и Японии.

Н. Н. Поснов

1941. **Конференция Ассоциации вычислительной техники. Филадельфия, 14—16 сентября 1955 г. Названия и краткое содержание докладов** (Association for computing machinery meeting, Philadelphia, Sept. 14 to 16, 1955 (Titles of papers and abstracts)), Computers and Automat., 1955, **4**, № 11, 17—30, 32—33 (англ.)

Названия и краткое содержание 129 докладов. Часть докладов содержит материалы по новым цифровым машинам (CONAC, NATPAC, IBM-704, IBM-705), их логическим схемам и узлам. В остальных рассматривается применение систем автоматического программирования и перспективы их использования, методы обработки большого количества данных, а также использование вычислительных машин для статистических и коммерческих расчетов. Рассматриваются вопросы решения матричных уравнений, методы решения различных задач математики, сопротивления материалов и т. д.

Несколько докладов посвящено общим вопросам построения вычислительных машин.

И. К. Волков

1942. **Вступительное слово к заседанию по «обучаемым» машинам. Уэр** (Introduction to session on learning machines. Ware Willis H.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 85 (англ.)

1943. **Кибернетика. Буза** (La cibernetica. Busa Roberto), Ingegneria mecc., 1954, **3**, № 2, 5—10 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Краткий очерк кибернетики с идеалистических позиций. Автор разделяет взгляды Н. Винера, но придает кибернетике еще более общее значение. По утверждению автора, философия кибернетики открывает «бесконечные возможности сверхъестественного», например «возможность» превращения человека в электрические импульсы с целью передачи его по телеграфу. Статья содержит обзор вычислительных машин, с которыми автор связывает кибернетику. Сообщается, что автор использовал счетно-аналитические машины ИБМ для филологических исследований по латинскому, греческому и немецкому языкам. Библ. 20 назв.

Г. Н. Поваров

1944. **О путях повышения производительности труда при работе на малых вычислительных машинах. Ларченко Е. Г.**, Сб. статей по геодезии, 1955, вып. 10, 3—13

Производительность труда на малых вычислительных машинах зависит от двух обстоятельств.

Во-первых, при умножении и делении на автоматических вычислительных машинах с увеличением количества знаков в компонентах на одну цифру производительность труда падает примерно на 15% (приведен график). Поэтому надо округлять числа так, чтобы не снижать производительность труда оставлением в числах ненужных цифр. Однако необходимо руководствоваться правилами вычислений с приближенными числами и не снижать точности результатов вычислений.

Во-вторых, при умножении и делении и на малых автоматических машинах на запись результата требуется примерно столько же времени, сколько и на само вычисление. Поэтому надо стремиться производить вычисления без записи промежуточных данных, что дает возможность увеличить производительность труда на 100%. Кроме того, при вычислении без записи промежуточных данных уменьшается влияние ошибок

округлений на результаты вычислений и уменьшается количество ошибок при списывании результатов со счетчика. При этом производительность работы зависит от вида вычислений и от типа применяемой машины. Так, при работе на автоматической машине САЛ II Ц на одно действие деления затрачивается примерно на 30—40% времени больше, чем на одно действие умножения. При работе на обычном арифмометре на одно действие деления затрачивается на 60—100% времени больше, чем на одно действие умножения. Поэтому при работе на этих машинах желательно преобразовать формулы так, чтобы в них меньше было действий деления. Например, деление на $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ следует заменять умножением на $\operatorname{cosec} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ и т. п. Это увеличит производительность труда на 25% (при работе на арифмометре). При работе на машинах типа Мерседес — Евклид (модели 37 и 38) на одно действие умножения затрачивается времени примерно на 10% больше, чем на упомянутых выше машинах. Деление на машинах типа Мерседес—Евклид на 12% более трудоемко, чем умножение. Указывается на необходимость проведения исследований по приведению расчетных формул к виду, удобному для вычислений на счетных машинах, и по созданию таких конструкций вычислительных машин, которые наилучшим образом удовлетворяли бы требованиям инженерно-технических расчетов.

В статье приводится ряд математических выражений, облегчающих счет на арифмометрах, полуавтоматических и автоматических машинах, а также формулируются требования к конструкции малой вычислительной машины, наиболее подходящей для инженерно-технических вычислений.

Описаны возможности малых вычислительных машин и рациональные приемы работы на них. В. П. Кузнецова

1945. Применение перфокартной вычислительной машины... Стилман (Punched card equipment. Stillman Alan H.), Prod. Engng, 1955, 26, № 9, 320 (англ.)

Приводится исправление трех ошибок в формулах в статье автора «Применение перфокартной вычислительной машины для автоматического управления металлообрабатывающими станками» (РЖМат, 1956, 4236). И. В. Лебедев

1946. Перфокарты в качестве помощника в вычислениях (Die Lochkarte als Helfer im Rechnungswesen), Allgem. Papier-Rundschau, 1955, № 23, 1037—1039 (нем.)

Сообщается о применении перфорационных машин для механизации учета и вычислительных работ. При этом рекламируются машины фирмы ИБМ. Даются сведения о производительности перфоратора типа 026, быстродействующей сортировки типа 082 и электронного вычислительного перфоратора типа 604. Н. П. Вашкевич

1947. Перфокарты в качестве помощника в вычислениях. (Die Lochkarte als Helfer im Rechnungswesen. W. P. in. K.), Allgem. Papier-Rundschau, 1956, № 3, 111—112 (нем.)

В добавление к одноименной статье (реф. 1946) кратко излагаются некоторые улучшения в применении перфокарт для вычислительных работ. В частности говорится о применении для бухгалтерских работ специальных перфокарт с 27 колонками, в которых цифры кодируются не пробивками, а отметками специальным графитовым карандашом. Графитовые отметки при прощупывании их контактными устройствами дают тот же эффект, что и пробивка. Н. П. Вашкевич

1948. О субтабулировании таблиц на счетно-аналитических машинах. Куликов Д. К., Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1955, 6, № 3, 192—201

Для субтабулирования таблиц предлагается осуществление на табуляторе интерполяционной формулы Ньютона. Разности в начальной точке предварительно вычисляются по приводимым в статье формулам, использующим коэффициенты полинома или разности таблично заданной функции, и вводятся в табулятор с карт вместе со значением аргумента и соответствующим значением функции.

Последовательным суммированием разностей, начиная со старшей, осуществляется формула Ньютона. Таким образом для получения одного значения табулируемой функции по формуле, учитывающей разности n-го порядка, требуется цикл на $n + 2$ ходов. Для повторения циклов используются чистые карты.

Рассматривается вопрос о точности задания начальных условий для обеспечения требуемой точности результатов. Л. Н. Кармазина

1949 П. Счетная цепь (Counting chain) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd.]. Австрал. пат. 153536, кл. 05,5, 22.10.53

Предлагается для счета импульсов использовать электрическую цепь, составленную из элементов с нелинейной характеристикой. Для управления состоянием элементов цепи используется явление заряда конденсатора через выпрямитель и разряда его на сопротивление. В. А. Зимин

1950 П. Электромеханическое множительное устройство. Грей (Electromechanical multiplier. Gray John W.) [General Precision Lab. Inc.]. Пат США 2696946, кл. 235—61, 14.12.54

Электромеханическое множительное устройство, содержащее дифференциальный конденсатор, разность емкостей которого пропорциональна одному из сомножителей, генератор переменного тока, выходное напряжение которого пропорционально второму сомножителю, четырехплечный мост с четырьмя выпрямителями в его плечах, в одну из диагоналей которого включаются выводы дифференциального конденсатора, а ко второй диагонали подключается нагрузка, с которой снимается напряжение, пропорциональное произведению двух величин. Б. Ш. Беркович

1951 П. Счетный прибор. Ватье (Calculating apparatus. Wattier Louis), Пат. США 2701096, кл. 235—61, 1.02.55

Дается описание счетного прибора, действие которого основано на свойстве подобных треугольников. С помощью прибора можно выполнять умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратных и кубических корней, а также находить значения тригонометрических функций углов от 0° до 90°, решать треугольники. Е. В. Вандышева

См. также: 1487, 1838, 1847

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абасов А. М. 1506
Аболинь В. Э. 1452
Айзенштат Н. Д. 1849
Айзерман М. А. 1898
Александренко А. И. 1842
Александров П. С. 1087 К
Александрян Р. А. 1460
Альбер С. И. 1251, 1514
Антропова В. И. 1069
Ариньш Э. И. 1281
Аржаных И. С. 1428, 1453
Ахиезер Н. И. 1336

Б

Бабуков А. Г. 1482
Балк М. Б. 1310
Барбашин Е. А. 1392
Бахвалов Н. С. 1817
Бахвалов С. В. 1837
Белинский П. П. 1358, 1359
Берман С. Д. 1163
Бернштейн С. Н. 1461 К
Благовещенский Ю. В. 1821
Блох Э. Л. 1672
Бодрецова Л. Б. 1365
Бодунов А. К. 1579
Болтянский В. Г. 1245, 1391, 1401
Бохенек К. 1421
Бразма Н. А. 1814
Бредихина Е. А. 1306
Британ Б. У. 1752
Бродский М. С. 1584
Бронштейн С. М. 1305
Быков Я. В. 1500

В

Вагнер В. В. 1185
Вайнберг М. М. 1503
Вайнштейн И. А. 1849
Ванагас В. В. 1395
Васильева А. В. 1406
Венков Б. А. 1122
Вигант Э. И. 1267
Визун Ю. И. 1924
Вильгельм В. 1203
Виноград Р. Э. 1400
Виноградов И. М. 1055, 1096
Волосов В. М. 1402, 1406
Вольперт А. И. 1441, 1448
Воробьев Н. Н. 1177

Г

Габиб-Заде А. Ш. 1505
Гаврилов Н. И. 1389
Гагаев Б. М. 1283
Гайдук Ю. М. 1067
Гальперн С. А. 1431
Гамкрелидзе Р. В. 1391
Гантмахер Ф. Р. 1398
Гахов Ф. Д. 1343, 1347
Гельфер С. А. 1327
Гельфонд А. О. 1103, 1104, 1491
Георгиев Г. Ив. 1242, 1243, 1255
Геронимус Я. Л. 1315
Гихман И. И. 1071
Гладкий А. В. 1262
Гнеденко Б. В. 1048, 1071
Годунов С. К. 1427
Гольденблат И. И. 1518
Гольдина Н. П. 1165
Гопп Ю. А. 1403
Градштейн И. С. 1390
Гринцевичюс К. И. 1750
Гуан Чжао-чжи 1830
Гукъямухов М. Б. 1490 Д
Гун Шэн 1330
Гуревич Б. Л. 1612
Гурин А. И. 1404
Гурьянов И. 1501
Гусейнов А. И. 1506

Д

Данилов В. Л. 1499
Дахия С. А. 1072, 1088 Д
Дезин А. А. 1451
Делоне Б. Н. 1134
Демьянов В. Б. 1121
Денисюк І. М. 1580
Депман И. Я. 1058
Джапаридзе И. С. 1706
Джваршейшвили А. Г. 1308
Дидидзе Ц. Е. 1221 Д
Длугач М. Й. 1818
Долматов К. И. 1476
Дынкин Е. Б. 1172, 1618

Е

Егоров В. Г. 1405
Ерёмин С. А. 1352
Ершов А. П. 1874
Ефремович В. А. 1236

Ж

Жаутыков О. А. 1063
Жданович В. Ф. 1452
Жидков Н. П. 1837

З

Загорский Т. Я. 1447, 1458
Зарицький М. О. 1226
Зевеке Г. В. 1856
Зинин М. В. 1850
Золотарев В. М. 1624
Зубова А. Ф. 1412 Д
Зуховицкий С. И. 1583 1597

И

Иванов В. К. 1494
Иманалиев М. 1509 Д
Исикава 1863

К

Камалов М. К. 1643
Каменский Н. П. 1745
Каминский Т. Э. 1539
Камынин С. С. 1874
Касумханов Ф. А. 1089 Д
Катков Г. Ф. 1748
Кауфман Р. Н. 1488 Д
Кащеев Н. А. 1811
Кацман А. Д. 1173, 1174
Кемхадзе Ш. 1164
Ким Е. И. 1493
Ким Сен Ен 1171
Киртадзе Г. 1228
Коба В. І. 1707
Ковалев И. Ф. 1825
Кованько А. С. 1284, 1601
Колбина Л. И. 1332
Колмогоров А. Н. 1085, 1259, 1260
Конторович П. Г. 1174
Коробов Н. М. 1099, 1100
Короли О. Е. 1463
Костюкович Е. Х. 1452
Кошелев А. И. 1440
Красносельский М. А. 1596, 1841
Крейнес М. А. 1849
Крикунов Ю. М. 1343
Круликовский Н. Н. 1035
Кубилюс И. 1116, 1117, 1131
Кузьмин Р. О. 1572, 1860
Куликов Д. К. 1948
Куратовский К. 1237
Курдин Н. С. 1467
Кучмар М. И. 1507
Куфарев П. П. 1323, 1324

Л

Лаврентьев М. М. 1450
Ладыженский Л. А. 1504
Лактанова Н. В. 1737
Ландис Е. М. 1443
Ларченко Е. Г. 1944
Латышева К. Я. 1073
Левин Б. Я. 1333
Левинсон И. Б. 1395
Левитан Б. М. 1566
Левицкий 1196
Леммлейн В. Г. 1795
Лепин А. Я. 1267, 1452
Линник Ю. В. 1118, 1120, 1131
Лобачевский Н. И. 1714 К
Лозинский С. М. 1812
Лопатинский Я. Б. 1430
Лопатинський Я. Б. 1444, 1445
Лучининов С. Т. 1074
Любимский Э. З. 1874
Любич Ю. И. 1578 Д
Люкшин В. С. 1432
Люстерник Л. А. 1813
Ляпин Е. С. 1143 К, 1181
Лященко Н. Я. 1399

М

Манджавидзе Г. Ф. 1345
Маневич Ш. С. 1645
Марков Н. В. 1064
Маркосян С. А. 1386
Маркушевич А. И. 1523
Маянц Л. С. 1825
Мейман Н. Н. 1425
Мельник И. М. 1340
Мещеряков А. С. 1141 Д
Микеладзе Ш. Е. 1815, 1833
Микусинский Я. 1611
Минь Сы-хао 1334
Михайлов Г. К. 1468
Михаиловић Д. 1472
Молчанов А. М. 1156
Молчанов Н. Н. 1387
Морозов В. В. 1171
Морэн К. 1826
Мосеенков Б. И. 1466
Мышкис А. Д. 1267, 1452

Н

Наймарк М. А. 1614 К
Натансон И. П. 1271, 1272
Неймарк Ю. И. 1465
Нейшулер Л. Я. 1864
Немыцкий В. В. 1087 К
Никитин П. П. 1702 Д
Николаева Г. А. 1325
Николаенко М. А. 1426
Номоконов М. К. 1495, 1496
Нужин М. Т. 1346

О

Одзаки 1696 К
Окамото 1697 К

П

Пальтов И. П. 1897
Пентковский М. В. 1854, 1855
Песин И. Н. 1357, 1358
Петров А. З. 1788
Погребысский И. Б. 1048
Полищук Е. М. 1600
Положий Г. Н. 1326, 1367
Польский Н. И. 1831
Понизовский И. С. 1176
Понтрягин Л. С. 1391, 1401
Посвянский А. Д. 1686
Пулькин С. П. 1394, 1434

Р

Рабинович В. С. 1598
Райк А. Е. 1040
Решов Н. О. 1084
Рогожин В. С. 1344
Роднянский А. М. 1275
Романов Н. П. 1335
Романовский В. Б. 1542
Романовский В. И. 1647

Рутицкий Я. Б. 1596
Рыбаков В. Н. 1742
Рыбаков П. М. 1051
Рыбкин Г. Ф. 1061
Рыжков В. В. 1749
Рымаренко Б. А. 1309

С

Сарымсаков Т. А. 1314
Сахнович Л. А. 1547 Д
Сегал Б. И. 1819
Семухина Н. В. 1324
Сесекин Н. Ф. 1166
Сигалов А. Г. 1513
Скоробогатько В.Я. 1433
Скороход А. В. 1623, 1624
Скундин Е. А. 1857
Слепенчук К. М. 1565
Слободянский М. Г. 1828
Словиковский В. 1227
Смирнов А. Д. 1865 К
Смирнов В. И. 1567 К
Смирнов М. М. 1419, 1424
Соколов И. Г. 1302
Солодовников А. С. 1761
Софронов И. Д. 1829
Снеддон И. 1544
Станковић Б. 1498
Стефановић Р. 1698 К
Стечкин С. Б. 1085, 1293, 1294, 1307
Стипанић Е. 1041
Столяров Н. А. 1268
Суворов Г. Д. 1318
Суетин П. К. 1316
Суханов И. М. 1489 Д
Сысоев А. Е. 1153
Сюй Ли-чжи 1834
Сюй Мо-фу 1068

Т

Тарасов Н. П. 1546 К
Тиман А. Ф. 1303, 1304
Тихонов А. Н. 1406

У

У Вэнь-цзюнь 1250

Ф

Фаге М. К. 1429
Фет А. И. 1365, 1515, 1516
Фишман К. М. 1317
Фридлендер В. Р. 1105
Фролов А. С. 1738
Фуксман Н. А. 1362

Х

Халилов З. И. 1591, 1820
Харазов Д. Ф. 1594
Харитоненко П. И. 1452
Харкевич А. А. 1672
Хэ Си-чжан 1246

Ц

Церетели О. Д. 1285 Д
Цинь Юань-сюнь 1385
Цитланадзе Э. С. 1602
Цзян Цзэ-хань 1246
Цодыкс В. М. 1286 Д

Ч

Чеботарев Г. Н. 1341
Челнокова В. Н. 1767
Чех Э. 1753, 1754
Чжоу Юй-линь 1246
Чибрикова Л. И. 1342
Чиркин М. П. 1477
Чистяков В. Д. 1066
Чуб А. Т. 1718
Чунихин С. А. 1154

Ш

Шадрина Н. Я. 1537
Шаишмелашвили В. Н. 1481
Шаманский В. Е. 1822
Шерман Д. И. 1508
Шитяков М. А. 1462 Д
Шлопак А. С. 1452
Шубников А. В. 1693
Шустер Х. С. 1536

Э

Эбаноидзе Э. 1423
Эйдельман С. Д. 1457, 1497
Эйдус Д. М. 1459

Ю

Юцис А. П. 1395
Юэ Минь-и 1097, 1098

Я

Якубик Я. 1204, 1207, 1216
Якунин П. Ф 1065
Яненко Н. Н 1381
Яцеев В. И.. 1413 Д

A

Abhyankar S. 1191, 1192
Aczél J. 1529, 1705
Adams C. R. 1079
Adler H. 1895
Agostinelli C. 1081
Al-Dhahir M. 1701 Д
Alexander S. N. 1886
Aljančić S. 1541
Anderson R. D. 1239
Angelescu T. 1384
Ankeny N. C. 1124
Apte M. 1774, 1780, 1781
Araki S. 1248
Arbault J. 1608
Arend S. 1832
Artzy R. 1704
Austin D. G. 1617

B

Backes F. 1703
Bailey A. E. 1904
Bailey N. T. J. 1671
Bajraktarević M. 1524, 1530
Banaschewski B. 1230
Barber S. W. 1861
Barlotti A. 1798
Barros Vidal C. E. 1382
Barthélemy 1678
Bartlett M. S. 1638
Bassotti L. 1747
Bauer F. L. 1880
Beckert H. 1446
Bellman R. 1145, 1660, 1662
Benado M. 1209
Bendat J. 1526
Benson D. C. 1409 Д
Beranek J. 1626
Bergman S. 1418
Bers L. 1437
Berstein I. 1368
Bertini M. 1934
Bhatnagar K. P. 1543, 1575, 1576
Biernacki M. 1552
Billingsley P. P. 1632 Д
Birindelli C. 1560
Blachman N. M. 1682
Blackwell D. 1282
Blanc Ch. 1839
Blanuša D. 1756
Blij F. van der 1112, 1119
Blum J. R. 1270
Bochenek K. 1421
Bochner S. 1785
Bojanić R. 1541
Boll C. H. 1652 Д
Bompiani E. 1799
Bordoni P. G. 1805
Borel A. 1200
Borwein D. 1564
Bosanquet L. S. 1563
Bosteels G. 1694
Botos G. 1851
Boyer C. B. 1050
Box G. E. P. 1642
Bragg L. R. 1410 Д
Brandt R. S. 1929
Brauer A. 1106
Brauner H. 1715, 1735
Briquet A. 1716
Browder F. E. 1449
Bruijn N. G. de 1148
Brunk H. D. 1312
Burford T. M. 1670
Busa R. 1943

C

Calabi E. 1772, 1792 Д
Calderón A. P. 1603
Campedelli L. 1687
Capra V. 1478
Carlitz L. 1128, 1129, 1130
Carr J. W. 1922
Cartan H. 1256 К, 1258 К
Cetveruhin N. F. 1713 К
Chatterjee P. C. 1570
Chaundy T. W. 1080
Chevalley C. 1194, 1729
Chihara T. S. 1548 Д
Choquet G. 1257 К
Clunie J. 1550
Cobham A. 1091
Cohn P. M. 1159, 1179, 1180
Collingwood E. F. 1338
Colombo B. 1646
Conte L. 1047
Coombs A. W. M. 1873
Corput J. G. van der 1538
Corson H. H. 1130
Cox D. R. 1675
Crampton T.H.M. 1220 Д
Cremonesi A. 1577
Cristea I. I. 1533
Crowe D. W. 1222
Curzio M. 1160

D

Dahlquist G. 1420
Dank M. 1861
Dantzig T. 1042
Darbo G. 1595
Davies E. T. 1769
Davies R. O. 1264
Davis A. C. 1211
Davis P. 1835
Davis R. C. 1669
Deaux R. 1685
Debi S. 1558
De Giorgi E. 1263
Deheuvels R. 1252
Delange H. 1114
Denjoy A. 1223 1528
Denniston R. H. F. 1775
DeSua F. 1094
Dilworth R. P. 1205
Di Noi S. 1709
Dixmier 1256 К
Donegan A. J. 1881
Doob J. L. 1454
Driggs I. 1665
Dubreil-Jacotin M.-L. 1606
Dulmage A. L. 1657
Dupač V. 1844
Durand D. 1641

E

Eallson L. 1888
Eberl W. 1621
Eberlein W. F. 1573
Edwards R. E. 1609
Eckler A. R. 1636
Ehrhart E. 1803
Ehrling G. 1388
Eichler M. 1188, 1189
Elbourn R. D. 1886
Emersleben O. 1866 К
Endl K. 1562
Engvall A. 1836
Erdélyi M. 1157
Frdös P. 1132
Etherington I. M. H. 1202
Euranto E. K. 1808
Evans G. W. II 1479
Eymard P. 1057
Eyraud H. 1555

F

Faddiejewa W. N. 1858 К
Faedo S. 1512
Fan Ky 1806
Fantappiè L. 1470, 1471
Farber M. 1881
Fava F. 1720
Feit W. 1150
Fenchel W. 1807
Ferla A. 1732
Fletcher T. C. 1905
Freudenthal H. 1033
Fog D. 1736
Fox W. C. 1522 Д
Fréchet M. 1370
Freedman A. L. 1910
Frenkel 1256 К
Freudenthal H. 1033, 1234
Freund J. E. 1144
Frölicher A. 1782
Fuhrmann A. 1801
Fujiwara T. 1215
Fuller F. B. 1797

G

Gale D. 1663
Ganelius T. 1313
Gani J. 1634
Garwick J. V. 1823
Gauss F. G. 1867 К
Gauthier L. 1728
Geppert M. P. 1683
Germain P. 1898
Gerstenhaber M. 1360, 1361
Ghika Al. 1581
Gihman I. I. 1627
Girault M. 1628 К
Gładysz S. 1487
Glicksberg I. 1660
Godeaux L. 1740
Goff K. W. 1892
Goffman C. 1561
Goldie A. W. 1198
Goldman O. 1731 Д
Golomb S. W. 1110
Goodman L. A. 1651 Д
Gott E. 1914
Grauert H. 1354
Graves L. M. 1592
Gravett K. A. H. 1190
Gray J. W. 1950 П
Greenwood J. A. 1641
Grenville-Wells H. J. 1848
Griffith L. E. 1921
Grize J.-B. 1093
Gross O. 1660

Grundy E. 1920
Grüss G. 1519 К
Guggenheimer H. 1253, 1254
Gutwirth A. 1724

H

Haack W. 1746 К
Halanay A. 1396
Hamstrom M.-E. 1238, 1239
Hankins J. D. 1793 Д
Harrold O. G. Jr, 1225
Hassan Akbar-Zadeh 1768
Hassler J. O. 1036
Hebroni P. 1527
Heflinger L. O. 1538
Hess A. L. 1688
Higman G. 1161
Hirokawa H. 1291
Hławiczka S. 1052
Hochschild G. 1199
Höiland E. 1485
Hopf E. 1616
Hopper G. M. 1876
Horie H. 1862
Horie N. 1762
Hornfeck B. 1109
Horton R. E. 1038
Horváth F. 1852
Hosszú M. 1851
Howard R. C. 1893
Hughes N. J. S. 1214
Hukuhara M. 1593
Hunt G. A., Jr 1630 Д
Hunt P. M. 1875
Huntsberger D. V. 1637
Huse M. 1810
Huzurbazar V. S. 1635

I

Inaba M. 1393
Indritz J. 1511
Ionescu D. V. 1146
Iséki K. 1182, 1183, 1232
Ishidzu T. 1862
Izumi S. 1292, 1300, 1301

J

Jackson J. R. 1661
Jacoby R. 1241
Jenkins J. A. 1331, 1348
Jéronnez L. 1692
John F. 1435, 1436
Jones C. E. 1899
Jongmans F. 1664
Julia G. 1372 К
Jurchescu M. 1371 К

K

Kahane J.-P. 1374 Д
Kamp P. van de 1082
Kampé de Fériet J. 1455, 1605, 1607
Kaluza T., Jr 1532
Kantorovici L. V. 1545 К
Kaplan E. L. 1631 Д
Karták K. 1273
Katsurada Y. 1766
Kauffeldt A. 1049
Keller J. B. 1474
Kemperman J. H. B. 1184
Kertész A. 1162, 1197
Kestens J. 1411 Д
Kinohara A. 1195
Kinukawa M. 1295, 1299
Kirby D. 1726
Klein M. L. 1928
Knödel W. 1838
Kobayashi S. 1758
Kodaira K. 1773
Koenigsberg E. 1673
Kolberg O. 1551
Kolden K. 1126
Kolodner I. I. 1480
Koshti M. E. 1534
Koszul J. L. 1784
Krafft G. 1170
Krilov V. I. 1545 К
Krishna S. 1741
Kruse F. H. 1877
Krzywicki A. 1510
Kudo T. 1247, 1249
Kuhn P. 1111
Kuramochi Z. 1351
Kuratowski K. 1083, 1237
Kurita M. 1770

L

La Fara R. L. 1847
Lafon J. P. 1057
Lalague P. 1376 Д
Land A. H. 1659
Lane N. D. 1744
Larrieu J. 1666
Laurikainen K. V. 1808, 1809
Zavrentiev M. A. 1520 К
Lee Chi-Yuan 1377 Д
Legendre A. M. 1140 К
Leichtweiss K. 1757
Leja F. 1339
Lelong Ferrand J. 1319
Lenz H. 1796
Leptin H. 1158
Lévy P. 1615
Lewis R. M. 1474
Libermann P. 1763, 1771
Lichnerowicz A. 1776, 1777, 1779, 1781
Lieblein J. 1644
Lievens J. 1719
Linfoot E. H. 1680
Liniger W. 1839
Linker A. 1043
Linnik Yu. V. 1135
Lions J. L. 1414, 1417
Liusternik L. A. 1520 К
Loev D. 1883
Lombardo-Radice L. 1800
Lorey W. 1681
Lott F. W. 1654 Д
Lumer G. 1589
Luxemburg W. A. J 1582

M

McAuley L. F. 1240
Machlup S. 1810
Mac-Intyre R. 1871
Mackay R. S. 1871
McKean H. P., Jr 1650 Д
Macon N. 1846
McShane E. J. 1269
Maehara S. 1092
Mahapatra S. 1297, 1298
Macjen J. 1868 К
Malyšev A. V. 1135
Manara C. F. 1733
Manarini A. M. 1486
Marchionna E. 1722
Marcus F. 1739
Marcus S. 1280
Marinescu G. 1587
Marshall A. H. 1923
Massimi R. 1422
Matsushita S. 1266
Mautner A. J. 1469
Medgyessy P. 1629 Д
Meyer M. A. 1667
Mickle E. J. 1278
Middleton D. 1667
Miehle W. 1883
Mignot N. 1937
Mihăileanu N. 1699 К
Mikolás M. 1568
Mikulik M. 1208
Mikusiński J. 1502
Milch A. 1909
Mitchell A. R. 1816
Mitrinović D. S. 1380
Miyanaga Y. 1187
Mode E. B. 1648 К
Mohanty R. 1297, 1298
Monk D. 1723
Moore J. C. 1258 К
Morgan H. C. 1928
Morin U. 1725
Moroni S. 1900, 1901
Morton G. 1659
Moser L. 1531
Mostow G. D. 1200
Mostowski A. 1142 К
Motzkin T. S. 1147
Muggia A. 1322
Mukohda S. 1247
Muller G. M. 1859
Murphy R. B. 1649 Д
Mycielski J. 1289

N

Nagata J. 1231, 1233
Nakamori K. 1438
Nardini R. 1484
Neugebauer O. 1079
Neumann B. H. 1169
Nevanlinna R. 1585
Newman M. H. A. 1076
Nicol C. A. 1125
Nicolescu L.-J. 1274
Nomizu K. 1759
Nørlund N. E. 1034
Northcott D. G. 1219 К, 1717
Novotný M. 1288
Nussbaum A. I. E. 1610

O

Oberhettinger F. 1442
Oberman R. M. M. 1890
Obi S.-Ya. 1862
Obrechkoff N. 1559
Ohtsuka M. 1337
O'Keeffe J. 1416
Onicescu O. 1620
Orgeval B. de 1721
Osborn J. M. 1375 Д
Ossicini A. 1554
Ostmann H.-H. 1137 К
Ostrowski A. 1549

P

Paatero V. 1328
Paivinen J. 1883
Palais R. S. 1764
Patterson E. M. 1201
Pearson C. E. 1658
Peck J. E. L. 1657
Petersen G. M. 1553, 1557, 1561
Piccard S. 1151
Pichler O. 1840
Pimiä L. 1743
Pini B. 1456
Pleijel A. 1483
Popovici C. P. 1127
Powderly M. 1229
Pratje I. 1320
Press H. 1668
Prieto C. F. E. 1613
Primrose E. J. F. 1695 К
Prosen R. J. 1877
Pucci C. 1277
Pungs L. 1056

Q

Quine W. V. 1090

R

Rabinowitz P. 1835
Radó T. 1279
Ragab F. M. 1569
Ramachandran K. V. 1640
Rauch H. E. 1360, 1361
Rearick D. F. 1894
Reichel 1932
Reymond A. 1078
Ridder J. 1261
Rideout V. C. 1670
Riesz M. 1136
Ringel G. 1224, 1802
Rivlin T. J. 1311
Rocha E. 1333
Rogers C. A. 1115
Ross H. Mc G. 1920, 1938
Roth L. 1727, 1730
Rubenstein R. A. 1810
Rushton S. 1469
Rybarski A. 1487
Rzewuski J. 1510

S

Sagawa A. 1349
Saito S. 1247
Samuel P. 1256 К
Sandgren L. 1804
San Juan Llosa R. 1373 К
Sario L. 1350
Sastry S. 1101, 1102
Sather D. S. 1670
Sato Masachiyo 1862
Satô Masako 1290
Sauer R. 1880
Savant C. J., Jr 1893
Sbrana F. 1734
Sce M. 1708
Schenkman E. 1178
Schlömilch O. 1868 К
Schoenberg I. J. 1525
Schoeneberg B. 1113
Scholz A. 1139 К
Schröder J. 1827
Schuster S. 1710
Schwartz L. 1417
Schwartz M.-H. 1755
Scott N. R. 1922
Sebastião e Silva J. 1586
Seckler B. D. 1474
Segre B. 1123
Seitz J. 1625
Selberg S. 1107, 1108
Selfridge J. L. 1125
Selfridge R. G. 1590
Semple J. G. 1726
Sen R. N. 1760
Serf J. 1256 К
Serre J.-P. 1256К, 1258 К
Shanks D. 1556
Shapley L. S. 1656
Sheldon J. W. 1824
Sherk F. A. 1744
Sherman S. 1526
Shukla K. S. 1045
Sibuya Y. 1593
Sik F. 1213, 1217, 1218
Slaughter D. W. 1896
Sloan R. W. 1378 Д
Słowikowski W. 1227
Smith J. L. 1869
Smith K. T. 1540
Smith W. L. 1675
Sonneborn L. M. 1175
Sparks R. A. 1877
Speiser A. 1039 К
Springer C. E. 1032
Stanciu P. 1700 К
Stange K. 1639
Stanković B. 1574
Stark M. 1142 К
Stecolcic L. 1371 К
Steffensen J. F. 1473
Steier H. P. 1887
Stein H. D. 1517
Stein S. K. 1517
Steinhaus H. 1674
Stelson H. E. 1845
Stepanov V. V. 1408 К
Stillman A. H. 1945
Stöhr A. 1369
Stoll W. 1353
Stone M. H. 1212
Sudo T. 1046
Sugawara M. 1244
Sumner D. B. 1492
Sunouchi G. 1296
Svoboda K. 1751
Sydnor R. L. 1904
Szász G. 1206
Szász P. 1711, 1712
Szekeres G. 1148
Szele T. 1162
Szénássy B. 1070

T

Takahashi S. 1622
Takasu T. 1765, 1786, 1789
Takeda Z. 1588, 1599

Takeno H. 1790
Tammi O. 1329
Tanabe Y. 1862
Tanaka T. 1235
Tarski A. 1210
Taussky O. 1806
Tautz G. L. 1439
Taylor R. L. 1167
Taylor S. J. 1265
Tedeschi B. 1684
Tenca L. 1053, 1054, 1690
Terracini A. 1075
Theodorescu R. 1619
Thom R. 1258 К
Thoma E. 1604
Thomas H. E. 1882
Thompson H. R. 1676
Tietze H. 1521 К
Tits J. 1791 К
Tizard R. H. 1379
Tobin S. 1155
Todd J. 1806
Tomić M. 1541
Tong Hing 1229
Tonnelat M. 1787
Toscano L. 1571
Touchais 1095 К
Trueblood K. N. 1877
Tsuchikura T. 1292
Tsuji M. 1355
Turnbull H. W. 1077
Turner R. D. 1475
Turnock J. H., Jr 1794 Д

U

Unkelbach H. 1321
Uttley A. M. 1872

V

Vandiver H. S. 1125, 1186
Varga O. 1705
Viola T. 1287
Volpato M. 1407
Vosper A. G. 1149
Votaw D. F., Jr 1653 Д
Vries H. de 1677

W

Wadel L. B. 1903
Walker N. C. 1905
Walsh J. E. 1655 Д
Walusinski G. 1037
Walz R. F. 1870
Wan C. C. 1903
Ware W. H. 1942
Wattier L. 1951 II
Weaver M. W. 1186
Weinberg L. 1371 К
Weinberger A. 1869
Whitney H. 1276
Williams F. K. 1928
Winn F. W. 1853
Winogradow I. M. 1138 К
Witt E. 1168
Wunderlich W. 1689, 1843
Wurtele Z. S. 1633
Wu Wen-Tsün 1250
Wylen J. 1883
Wyman M. 1531

Y

Yamamoto K. 1133
Yanagawa S. 1862
Yano K. 1769, 1778, 178
Yoshida M. 1193
Yoshizawa T. 1397
Yûjôbô Z. 1356, 136 1364

Z

Zaanen A. C. 1582
Zacher G. 1152
Zaidman S. 1415
Zamorski J. 1510
Zariski O. 1191
Zawrosky A. 1535
Zięba A. 1510
Zimmermann E. 1366
Zwinggi E. 1679
Zygmund A. 1603

ქემხაძე შ. 1164 ჭბანოიძე თ. 1423

吳文俊 1250
周毓麟 1246
岡本石根 1697 К
徐利治 1834
江澤涵 1246
石川榮助 1863
秦元勳 1385
許默夫 1068
賀錫章 1246
越民義 1096, 1098
閔嗣鶴 1334
關肇直 1830
高見亘 1696 К
醍昇 1330

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНЕНИЯ

К реф. 1074 (1955 г.)

Слово «система» во 2-й строке реферата следует заменить словами «схема аксиом свертывания системы».

А. С. Есенин-Вольпин

К реф. 406 (1956 г.)

В дополнение к реферату на статью О. Борувка о колеблющихся интегральных дифференциальных уравнениях 2-го порядка редакция считает нужным указать, что статья содержит следующее.

Пусть x — некоторое число и A — множество решений уравнения

$$y'' = Q(x)y, \quad \text{(а)}$$

имеющих x своим нулем, а B — множество тех решений, которые имеют x нулем своей производной. Вводятся в рассмотрение четыре бесконечных последовательности функций. $\varphi_n(x)$ ($\varphi_{-n}(x)$) означает n-й следующий за числом x (предшествующий числу x) общий нуль решений, входящих во множество A, $\psi_n(x)$ ($\psi_{-n}(x)$) — n-й следующий за x (предшествующий x) общий нуль производных решений множества B; $\chi_n(x)$ ($\chi_{-n}(x)$) — n-й следующий за x (предшествующий x) общий нуль производных решений множества A; $\omega_n(x)$ ($\omega_{-n}(x)$) — n-й следующий за x (предшествующий x) общий нуль решений множества B.

Эти четыре последовательности функций называются центральными дисперсиями соответственно 1, 2, 3, 4 рода.

Далее устанавливается ряд общих свойств центральных дисперсий, например, их непрерывность, возрастание, наличие производных. Приводятся также некоторые, правда, неэффективные, представления центральных дисперсий через $Q(x)$.

Для выяснения других свойств дисперсий наряду с данным уравнением рассматривается уравнение

$$\sqrt{\xi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi'}}\right)'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x). \quad \text{(б)}$$

Связь между уравнениями (а) и (б) характеризуется тем, что выражение $y(\xi)/\sqrt{|\xi'|}$, составленное из любого решения уравнения (а) и любого решения уравнения (б), является решением уравнения (а). Решения уравнения (б) образуют совокупность так называемых собственных дисперсий и образуют некоторую непрерывную группу.

Далее изучаются свойства этой группы и ее представления.

В. В. Немыцкий

К реф. 1562 (1956 г.)

Редакция считает необходимым отметить следующее:

1. В статье приводится обобщение формулы Райса (Bell System Techn. J., 1945, 24, 46—156), выражающей распределение длительности τ-«выброса»; при этом под выбросом авторы понимают промежуток времени, в течение которого случайная дифференцируемая функция $\xi(t)$ находится выше заданной кривой $\varphi(t)$ (в случае, исследованном ранее Райсом, $\varphi(t) = 0$). Полученный закон распределения $P(\tau)$ выражается через совместные плотности распределения $P_k(\xi_1, \ldots, \xi_k, \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_k)$ векторов $\xi(t_i)$ и $\dot{\xi}(t_i) = \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ($k = 1, 2, \ldots$).

2. При некоторых, точно не выясненных условиях, указывается на возможность получить разложение $\lg P(\tau)$, используя специальные функции «корреляции плотности», определяемые по плотностям $P_k(\xi_1, \ldots, \dot{\xi}_1, \ldots)$.

3. Указывается, что в стационарном случае при больших τ $P(\tau) \approx e^{-\beta\tau}$, $\beta > 0$; находится выражение для $\beta > 0$.

4. Находится формальное разложение плотностей $P_k(\xi_1, \ldots, \xi_k, \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_k)$ по многомерным функциям Чебышева-Эрмита.

Все выводы проведены чисто формально и не обосновываются точными условиями законности многочисленных предельных переходов.

Н. В. Смирнов

К реф. 2327 (1956 г.)

Редакция считает нужным отметить, что формула Жиро, о которой идет речь в реферате, обобщает соответствующий результат С. Г. Михлина (Матем. сб., 1936, 1 (43), № 4, 535—552). В упоминаемой в реферате статье Трикоми (1927 г.) дана формула для ядра двойного сингулярного интеграла, полученного композицией двух таких интегралов.

К реф. 5706 (1956 г.)

Строка 11. —Вместо слова «больших» следует читать «простых».

К реф. 5743 (1956 г.)

В заглавии реферата вместо $\varphi_{(n)}$ и $\sigma_{(n)}$ следует читать $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$.

К реф. 5814 (1956 г.)

Строка 7 снизу. —Вместо слова «референт» следует читать «Дженкинс».

К реф. 5975 (1956 г.)

Стр ку 21 сверху следует читать: «f — произвольная линейная комбинация. . . .»

К реф. 6504 К (1956 г.)

В последнем абзаце вместо слова «вычислениями» следует читать «анализом».

К реф. 6549 (1956 г.)

В формуле на строке 16 сверху вместо $\lim_{h\to\infty}$ следует читать $\lim_{h\to 0}$. В. С. Федоров

К реф. 7838 (1956 г.)

На строке 5 третьего абзаца написано $|a|$, следует $|a|$. В. А. Успенский

К реф. 7994 (1956 г.)

Примечание референта. Пример мероморфной в $|z|<\infty$ функции с заданным аналитическим множеством асимптотических значений впервые, по-видимому, был построен Д. В. Потягайло (Про асимптотичні та граничні властивості мероморфних функцій. Дипл. работа, Львовский ун-т, 1951). А. А. Гольдберг

К реф. 8005 (1956 г.)

Строку 16 снизу следует читать: $R(O,G)\leqslant 4^{1/n}|a|$ Ю. Е. Аленицын

К реф. 276 (1957 г.)

Фамилию автора статьи следует читать «Mařík Jan» и в русской транскрипции «Маржик».

К реф. 853 (1957 г.)

2-ю строку правой колонки следует читать так: E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, ch. XII,

---

Технический редактор *Р. М. Денисова*